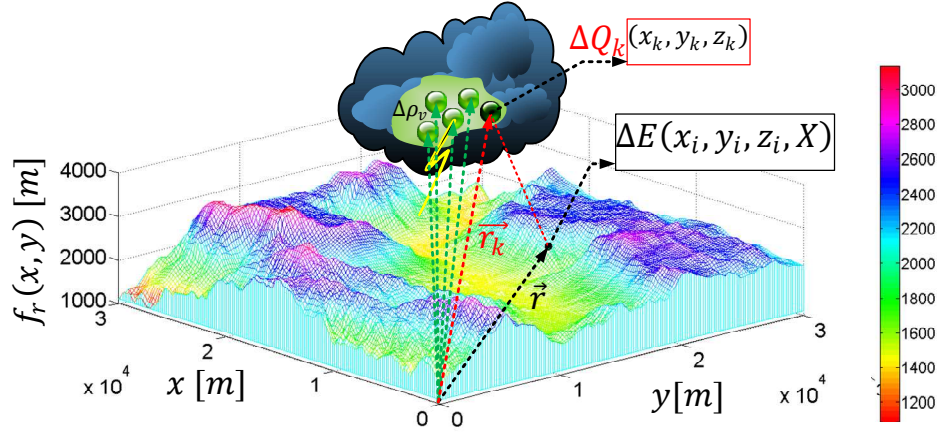


2.3.2 Modelos de múltiples cargas.

Para algunos investigadores [7], [31], a veces resulta más conveniente representar la variaciones del campo eléctrico ΔE como el efecto de la variación de varios centros de carga de distinta polaridad en diferentes puntos a diferentes alturas.

Figura 2-30: Modelo de Múltiples Centros de Carga



Lo anterior está ilustrado en Figura 2-30, donde debido a la geometría irregular de las nubes de tormenta y las características del campo observado a nivel de suelo, resulta conveniente el modelado con múltiples cargas de carga ΔQ_k en coordenadas (x_k, y_k, z_k) con $k = 1, \dots, N_q$ es decir N_q centros de carga. De acuerdo con la sección 2.2.1 el campo eléctrico tanto de la solución por carga puntual como la representación con condiciones de frontera cumple con el principio de superposición, así que la expresión del cambio en el campo eléctrico ΔE en un punto de observación de coordenadas (x_i, y_i, z_i) cuando se tienen N_q centros de carga se puede ver como la superposición de los campos de cada una de las ΔQ_k centros de carga.

De acuerdo con lo anterior, para el modelo plano, se tiene que el modelo de múltiples cargas se puede ver como la sumatoria de (2-18), es decir la superposición de los campos el cual se encuentra expresado en la ecuación (2-21) para el caso de un modelo del campo donde los puntos de observación se encuentran sobre un plano en (xy) a una altura H_p respecto a z , note que si $H_p = 0$ se tiene el modelo encontrado en [31].

$$\vec{\Delta E} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{N_q} \left(\frac{\Delta Q_k(z_k - H_p)}{((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - H_p)^2)^{3/2}} \right) \hat{k} \quad (2-21)$$

De acuerdo con lo anterior, note que éste tipo de modelado se puede ver como la discretización de una distribución continua de carga. Recordando uno de los principios fundamentales del electromagnetismo clásico se considera que la carga eléctrica de cualquier cuerpo está cuantizada [1] por lo que otras distribuciones de carga eléctrica se pueden ver también como la superposición de múltiples cargas eléctricas.

De igual manera, éste principio de superposición también aplica para el modelo que considera el relieve, por esta razón, teniendo en cuenta lo ilustrado en la Figura 2-30 el modelo de multiples cargas se puede ver como:

$$\Delta E_{FEM} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2-22)$$

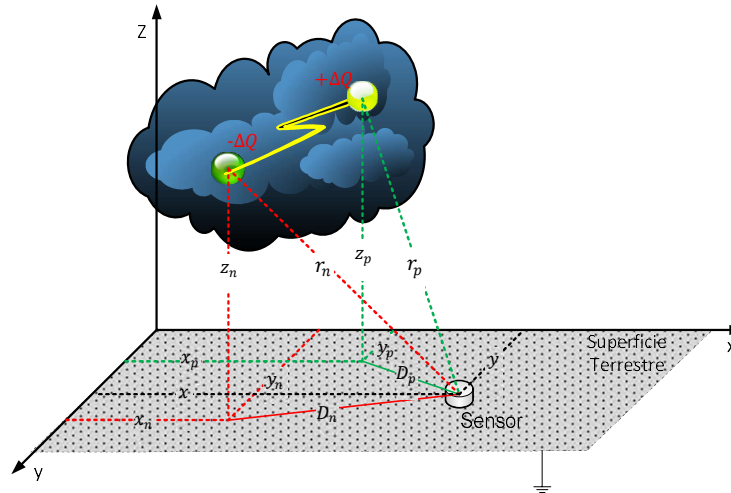
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\sum_{k=1}^{Nq} (\Delta Q_k \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_k))$$

Bajo la condición de frontera dada por:

$$\Delta E_{FEM} = 0 \text{ y } \phi = 0 \text{ para } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, y -\infty < z \leq f_r(x, y)$$

Un caso especial para el modelado de múltiples cargas consiste en el modelo bipolar del campo, el cual considera que las variaciones del campo eléctrico se deben a variaciones de igual magnitud en dos centros de carga de polaridad opuesta tal como se muestra en la Figura 2-31. Resulta ser práctico para el estudio de descargas intranube, sin embargo en algunos estudios como el de aranguren [7] consideran que una representación bipolar resulta más adecuada para la representación de los cambios en el campo.

Figura 2-31: Modelo Dipolo



Teniendo en cuenta la ecuación (2-22), éste modelo se puede describir como la superposición de dos cargas eléctricas ΔQ y $-\Delta Q$ ubicadas en (x_p, y_p, z_p) y (x_n, y_n, z_n) respectivamente teniendo el modelo expresado en (2-23):

$$\vec{E} = \frac{\Delta Q}{2\pi\epsilon} \left(\frac{(z_p - H_p)}{\left((x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2 + (z_p - H_p)^2\right)^{3/2}} - \frac{(z_n - H_p)}{\left((x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2 + (z_n - H_p)^2\right)^{3/2}} \right) \quad (2-23)$$

Teniendo en cuenta ésta expresión se observa que la cantidad de parámetros que se deben encontrar es de $n=7$ por lo cual, tal como se indicará en el desarrollo del Capítulo 3, se requerirán de al menos siete estaciones de medida para el estudio del campo bajo este modelo, de manera análoga, de (2-22) cuando se tiene el modelo con relieve se puede expresar para el modelo bipolar como:

$$\Delta E_{FEM} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2-24)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\Delta Q \left(\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_p) - \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_n) \right)$$

Bajo la condición de frontera dada por:

$$\Delta E_{FEM} = 0 \text{ y } \phi = 0 \text{ para } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, y -\infty < z \leq f_r(x, y)$$

Dónde $\vec{r}_n = [x_n \ y_n \ z_n]$ y $\vec{r}_p = [x_p \ y_p \ z_p]$ son los vectores de posición de ambos centros de carga, de igual manera la solución se podrá ver como la superposición de centros de carga individuales en diferentes posiciones geométricas.

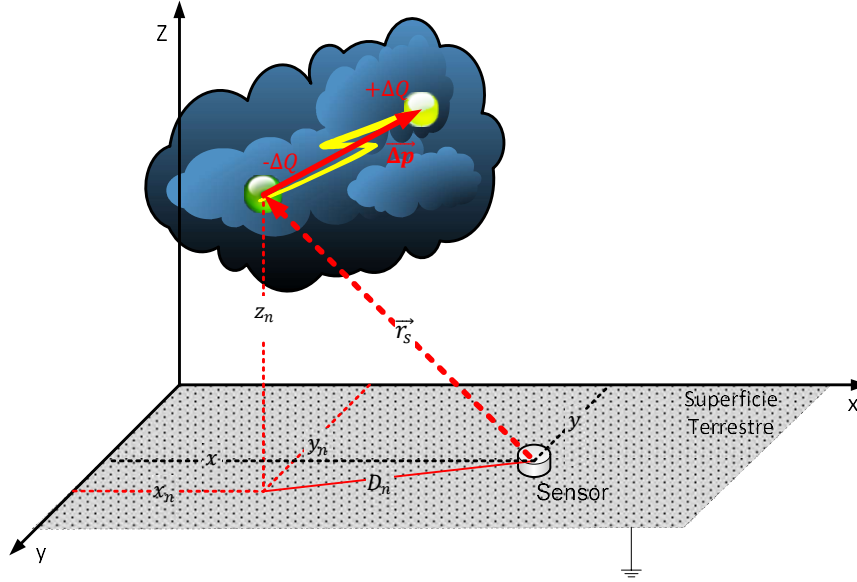
Una manera alternativa de representación, es la que se encuentra propuesta por Jacobson y Krider [31], dónde se asume que los centros de carga positivo y negativos se encuentran en las mismas coordenadas geográficas x, y es decir $x_n = x_p = x_0$ y $y_n = y_p = y_0$ donde se tienen dos cargas de igual magnitud y polaridad opuesta a distintas alturas z_n y z_p , teniendo en cuenta esto y el modelo de (2-23) se tiene el modelo (2-25) alternativo al modelo Q (2-18), dónde se tienen en cuenta cinco parámetros.

$$\vec{E} = \frac{\Delta Q}{2\pi\epsilon} \left(\frac{(z_p - H_p)}{\left((x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_p - H_p)^2\right)^{3/2}} - \frac{(z_n - H_p)}{\left((x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_n - H_p)^2\right)^{3/2}} \right) \quad (2-25)$$

Una aproximación al modelo dipolar expresado en consiste en considerar que la distancia entre los centros de carga es relativamente corta de tal manera que pueda ser considerado como un dipolo, reemplazando los dos centros de carga por un vector que

representa el momento dipolar, tal como se indica en la ecuación (2-26) propuesto por Aranguren [9]

Figura 2-32: Momento Dipolar



De acuerdo con el modelo del momento dipolar

$$\vec{\Delta E} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0\|\vec{r}_i\|^3} \left(\frac{3z_d(\vec{\Delta p} \cdot \vec{r}_i)}{\|\vec{r}_i\|^2} - \Delta p_z \right) \hat{k} \quad (2-26)$$

Dónde:

- $\vec{r}_i = (x_i - x_d)\hat{i} + (y_i - y_d)\hat{j} + (-z_d)\hat{k}$ Corresponde al vector de la distancia entre el dipolo y el punto de observación.
- $x_d = x_n$
- $\vec{\Delta p} = \Delta p_x\hat{i} + \Delta p_y\hat{j} + \Delta p_z\hat{k} = \Delta Q \left((x_p - x_n)\hat{i} + (y_p - y_n)\hat{j} + (z_p - z_n)\hat{k} \right)$ Es el vector del momento dipolar

Cabe notar que éste tipo de modelo es una aproximación que asume que la distancia entre los centros de carga es corta comparada con la distancia al punto de observación, a pesar de ésta limitación, el número de parámetros a encontrar respecto al modelo planteado en (2-23) es de $n=6$ los cuales corresponden a los componentes del momento y la ubicación de $\vec{\Delta p}$.

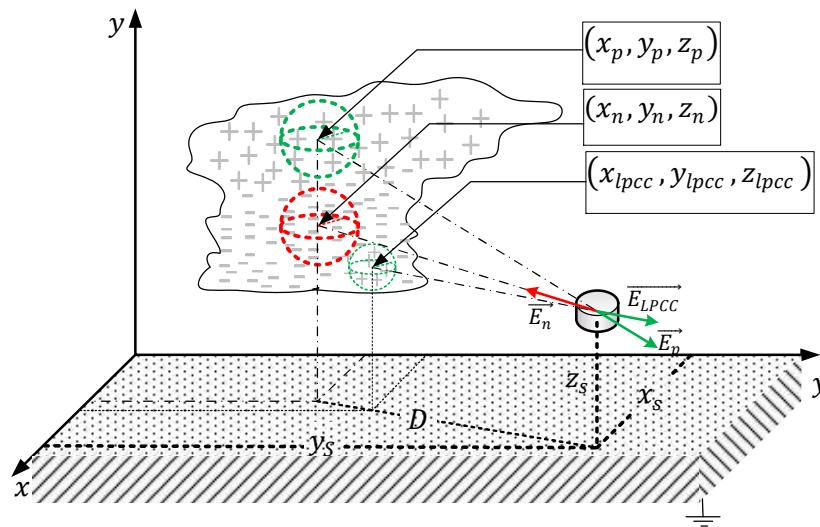
Como se indicará en la sección 2.4 el modelo multipolar, también servirá para el modelado de la estructura de la nube de tormenta, por esta razón para analizar el comportamiento de éstos modelos respecto a los modelos de suelo plano se tomará como ejemplo el estudio de la estructura de la nube de tormenta.

2.4 Modelo electrostático de la estructura eléctrica de la nube de tormenta.

De acuerdo a como se indicó en la sección 1.2.1, mediante observaciones experimentales se ha determinado idealmente la estructura tripolar de las nubes de tormenta, es decir, que el comportamiento del campo eléctrico ambiental debido a la presencia de estas nubes es debida a una estructura de tres regiones o centros de carga tal como se observa en la Figura 2-33: En la parte superior de la nube una carga predominantemente positiva, en la inferior predominantemente negativa, además de la existencia de un centro de carga positivo en la base de la nube conocido como el LPCC - Low Positive Charge Center

Éstas conclusiones acerca de la estructura de la nube fueron tomadas mediante mediciones de campo electrostático a nivel de suelo e incluso mediante campañas de medida usando mediciones de altura, usando sensores en sistemas de globos o en aeronaves[9].

Figura 2-33: Modelo Tripolar Nube de Tormenta



Como se observa en la Figura 2-33, una nube presenta una geometría irregular, debido a esto una de las aproximaciones que se puede realizar para su modelado, es considerar una aproximación a una distribución de carga esférica con coordenadas de subíndices p , n , $lpcc$ para los centros de carga positivo, negativo y LPCC respectivamente. La Tabla 2-4 muestra una referencia de las características de los centros de carga bajo una aproximación esférica. Sin embargo, dado que se desea encontrar el campo en la

superficie del suelo, como se indicó en la sección 2.2.2 esta distribución se comporta como una carga puntual en el centro de cada esfera.

Tabla 2-4: Condiciones de los Centros de Carga (Adaptado de [21]).

Parámetro	Símbolo	Valores Reportados en la literatura	Valores tomados
Densidad Volumétrica de carga [nC/m^3]	ρ_v	0.1 – 4 ≤ 10	1.4921
Radio de la Nube [km]	R	~ 2 2 – 6	2
Altura del Centro de Carga Negativo [m]	Z_n	3000 – 7000 4000 – 7000 3000 – 5000	3200 – 7000
Altura del Centro de Carga Positivo [m]	Z_p	8000 – 12000 7000 – 10000 ~ 10000	7000 – 10000

Teniendo en cuenta lo anterior y el principio de superposición (ver 2.2.1), el campo eléctrico a nivel de suelo ($z_s = 0$), para una superficie plana debido a la presencia de una nube de tormenta teniendo en cuenta la ecuación (2-16) y la Figura 2-33 estará dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{Q_p z_p}{((x_p - x_s)^2 + (y_p - y_s)^2 + z_p^2)^{3/2}} + \frac{-Q_n z_p}{((x_n - x_s)^2 + (y_n - y_s)^2 + z_n^2)^{3/2}} + \frac{Q_{lpcc} z_p}{((x_{lpcc} - x_s)^2 + (y_{lpcc} - y_s)^2 + z_{lpcc}^2)^{3/2}} \right) \hat{k} \quad (2-27)$$

Es decir, la suma de los campos aportados para cada una de las cargas de la nube. De manera análoga cuando se dispone de un relieve montañoso, el modelo se puede expresar como:

$$E_{FEM} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2-28)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = Q_p \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_p) - Q_n \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_n) + Q_{lpcc} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_{lpcc})$$

Bajo la condición de frontera dada por:

$$\Delta E_{FEM} = 0 \text{ y } \phi = 0 \text{ para } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, y -\infty < z \leq f_r(x, y)$$

Dónde:

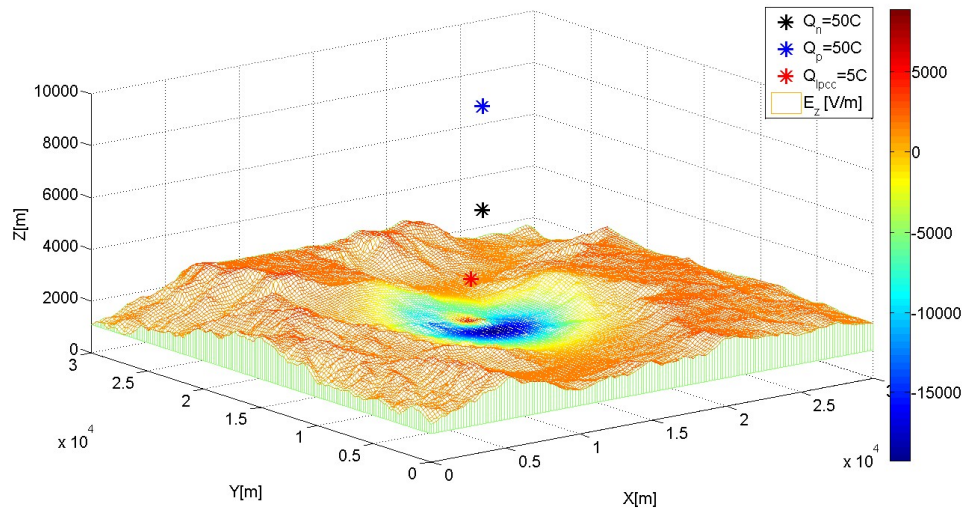
- $\vec{r}_i = [x_i \ y_i \ z_i]$ es el vector posición del punto de observación.
- $\vec{r}_n = [x_n \ y_n \ z_n]$, $\vec{r}_p = [x_p \ y_p \ z_p]$ y $\vec{r}_{lpcc} = [x_{lpcc} \ y_{lpcc} \ z_{lpcc}]$ son los vectores posición de los centros de carga Q_n , Q_p y Q_{lpcc} respectivamente.

Con el fin de comparar el comportamiento del modelo de la nube de tormenta expresado en la ecuación (3-1), se realizaron las

siguientes simulaciones donde se observó la componente vertical del campo eléctrico.

Para éstas simulaciones se utilizaron para los centros de carga los parámetros que se encuentran en la Tabla 2-4, éstos equivalen a tener centros de carga de $Q = 50C$ tanto para el centro de carga positivo como negativo, los cuales se asumirán que están en coordenadas iguales pero en alturas diferentes, es decir $(x_n, y_n) = (x_p, y_p)$ y $z_n < z_p$ es decir la altura de los centros de carga va a estar en los rangos de la tabla mencionada. En cuanto al LPCC, se asumió que éste se encontraba a desplazado 1000m respecto a la cordenada x de los otros centros de carga, es decir $x_{lpcc} = x_n$ y $y_{lpcc} = y_n + 1000$ a una altura de $z_{lpcc} = 3200m$ y una carga $Q_{lpcc} = 5C$

Figura 2-34: Campo E_z y Ubicación de los Centros de Carga Estructura Tripolar.

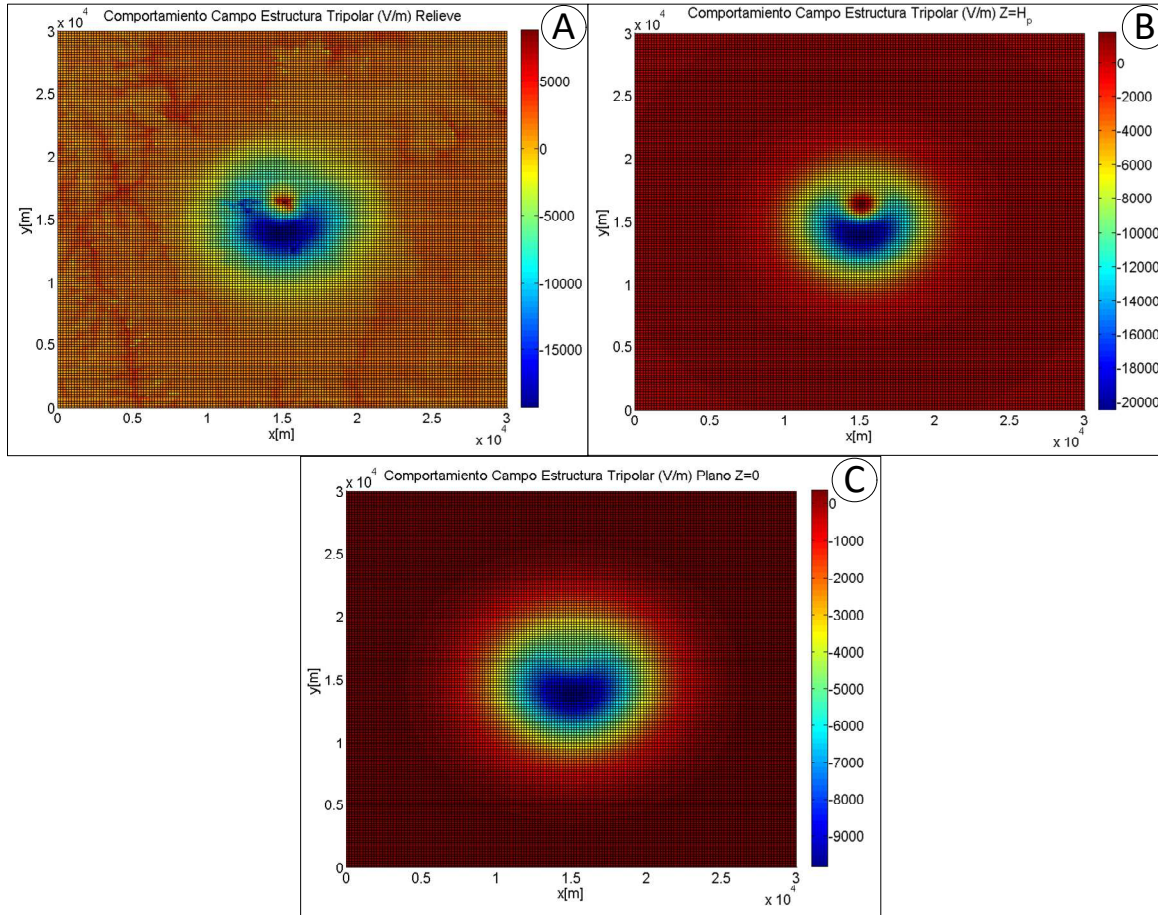


En primer lugar, se asumió una estructura tripolar justo en la mitad del área de estudio, es decir $y_n = 15000m$ y $x_n = 15000m$ para una altura de los centros de carga $z_n = 6000m$ y $z_p = 10000m$, para obtener el comportamiento del campo de una estructura tripolar tanto para el modelo de carga puntual como para el modelo con el relieve como se indica en la Figura 2-34.

La Figura 2-35 muestra el comportamiento del campo eléctrico en contraste con la representación de modelo de suelo plano para las condiciones planteadas anteriormente. En general, debido a las características de los centros de carga, se observan cambios de polaridad en los campos para ambos modelos, adicionalmente, dado que los puntos sobre el relieve se encuentran más cerca de los centros de carga de la nube de tormenta, la magnitud con el modelo

que tiene el relieve se ve influenciada por el mismo, si se realiza la corrección considerando un plano a una altura diferente a 0 m.s.n.m. ($H_p = 1500m$ altura media del valle de aburrá) se mejora la magnitud del campo eléctrico observado.

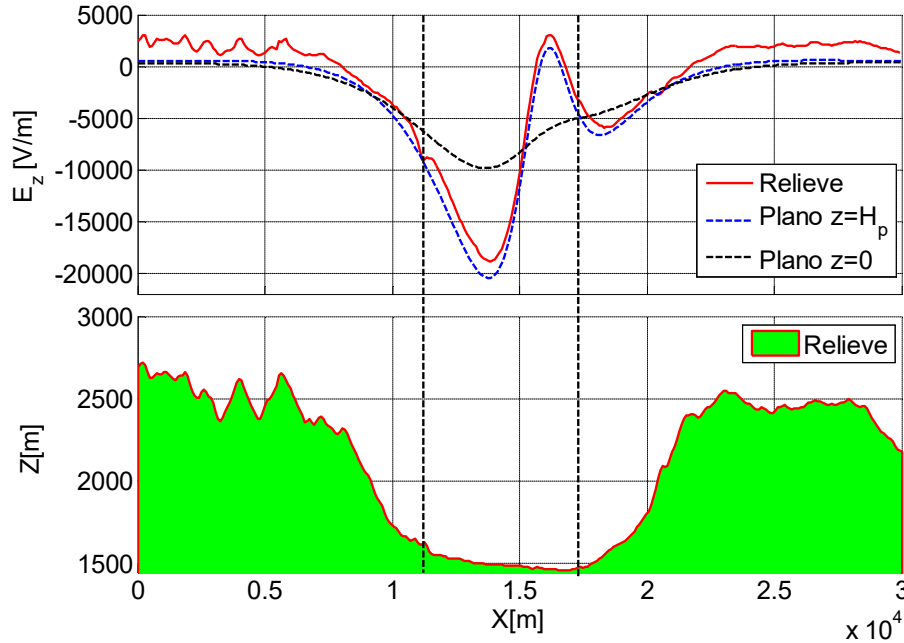
Figura 2-35: Comportamiento del Campo Eléctrico en la Superficie:
A) Relieve, B) Plano en $Z=H_p$, C) Plano en $Z=0$



Lo anterior, se ve más claramente si se observa en una dimensión tal como se muestra en la Figura 2-36, donde se observa el comportamiento del campo sobre el relieve a lo largo de una línea en el eje x con $y = 15km$, donde se aprecian los distintos cambios de polaridad dado por la existencia de cargas de diferente signo, y las magnitudes distintas para cada uno de los casos, donde incluso con el ajuste a la altura del plano, la magnitud del campo llega a ser superior respecto a la del modelo con relieve.

Adicional a lo anterior, también se observa el efecto del relieve en el campo eléctrico, ya que las variaciones en altura en la superficie hacen que el campo en regiones alejadas de la nube de tormenta tenga puntos de crecimiento y de decrecimiento.

Figura 2-36: Comportamiento del Campo Sobre el Relieve en x para $y=15000m$ para un Tripolo.



Debido que lo anterior solo fue un ejercicio de ejemplo para observar el comportamiento del campo de una sola estructura tripolar, tomando como referencia las mismas alturas de los centros de carga, y como eje de referencia de la nube de tormenta la posición x,y de los centros de carga positivo y negativo, se realizó un barrido en la región de estudio tomando como referencia los puntos ubicados en la Figura 2-27.

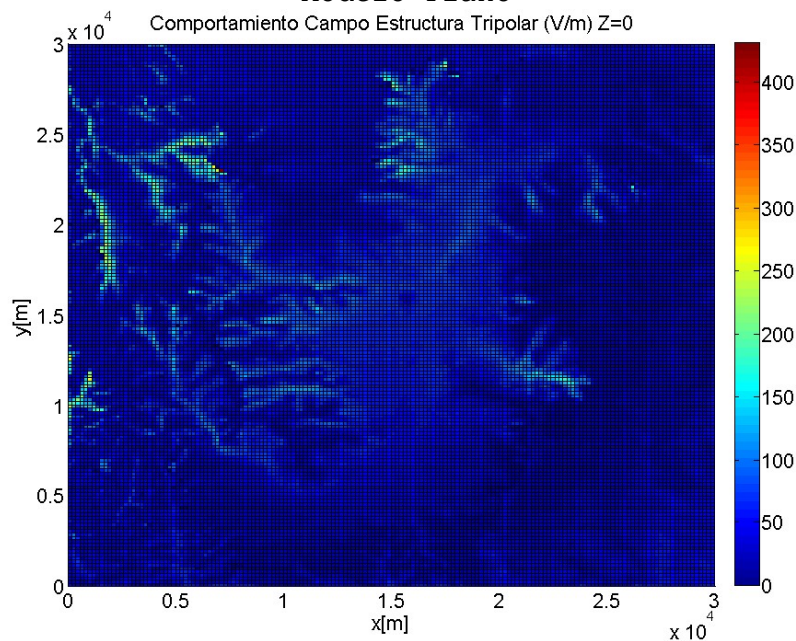
Es decir que para el experimento, se tomo una estructura tripolar con $z_n = 6000m$, $z_p = 10000m$, $z_{lpcc} = 3200$ y $y_{lpcc} = y_n + 1000$ y se "movió" por toda la region en los puntos de la Figura 2-27.

Para cada uno de los 120 casos evaluados, se observó el campo en todos los puntos sobre la superficie los cuales se pueden observar en la Figura 2-14. También, se realizó el cálculo bajo las mismas condiciones utilizando el modelo plano expresado en Figura 2-27. Finalmente se encontro el error relativo del campo en modelo plano respecto al modelo con relieve para uno de los casos y se obtuvieron los valores promedio sobre todos los puntos de la región de estudio.

La Figura 2-37 Muestra el error sobre cada punto de obeservación calculados como el promedio del error relativo de ΔE en cada punto de observación sobre el relieve, resultado de la comparación del campo calculado con suelo ideal respecto al suelo con relieve. Donde se observa que las regiones donde el relieve tiene cambios

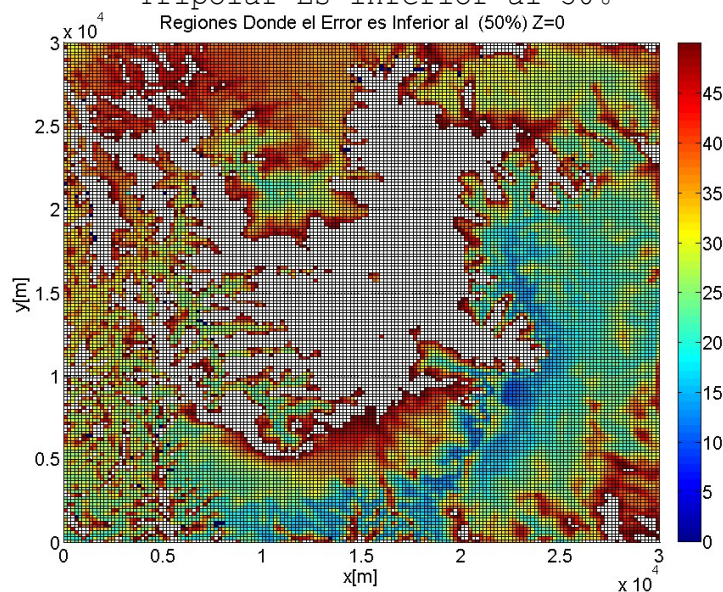
de pendiente o están en los puntos más bajos, presentan mayor error.

Figura 2-37: Error Relativo Estructura Tripolar Modelo Relieve Vs
Modelo Plano



Lo anterior se puede observar de una manera más detallada en la Figura 2-28, donde se muestran las regiones donde el error cometido al usar un modelo plano ideal es inferior al 50%, donde las regiones sin color son aquellas donde el error supera el 50%.

Figura 2-38: Región Dónde el Error Relativo de la Estructura
Tripolar Es inferior al 50%



3 Capítulo 3 El Problema de la Localización Espacial y Caracterización de los Cambios en los Centros de Carga de las Tormentas Eléctricas.

El análisis de las medidas de campo eléctrico ambiental, ha permitido estudiar la estructura eléctrica de las nubes de tormenta así como el comportamiento de los centros de carga durante las descargas eléctricas atmosféricas. El estudio de éste campo, ha permitido establecer hipótesis respecto a la estructura eléctrica de las tormentas eléctricas, así como de las propiedades de los rayos a través de la observación de los cambios bruscos del campo eléctrico, lo cual permite, a través de observaciones realizadas con redes de sensores tener información de la carga transferida y su ubicación espacial.

Uno de los aspectos principales en la investigación de las tormentas eléctricas, consiste en evaluar el comportamiento de los centros de carga en las nubes de tormenta, principalmente la magnitud y la altura a la cual se encuentran los cambios en los centros de carga en las descargas eléctricas atmosféricas. La Tabla 2-1 Muestra una evolución temporal de las investigaciones más importantes sobre tormentas eléctricas, desde los aportes realizados por Wilson hasta los más actuales encontrados en la revisión de la literatura. Desde el punto de vista de un marco global hasta las investigaciones de ámbito local como es el caso del investigador Aranguren (2011) [7].

Se puede decir que la mayoría de estos trabajos han marcado hitos importantes en la investigación de las tormentas eléctricas observadas desde el punto de vista del campo eléctrico. Adicionalmente, cabe notar que para la mayoría de estos se asume la aproximación de suelo plano infinito propuesta inicialmente por Wilson (1916). Entre éstas investigaciones cabe destacar:

Tabla 3-1: Estudios del Comportamiento Electrostático de las Tormentas (Adaptado de [7], [31])

Lugar	Carga [C]	Altura [km]	Modelo	Investigador
Inglaterra	-11.5 a -43	7	Monopolo	Wilson (1916) [14]
Inglaterra	-20	2	Monopolo	Wilson (1920) [15]
Sudáfrica	-15	3		Schonland (1928) [54]
Inglaterra	-10 a -40	4.5 a 5	Monopolo	Wormell (1939) [56]
Nuevo México (USA)	-24	4 a 7	Bipolar	Workman (1942) [57]
Sudáfrica	-4 a -40	2.5 a 8.7		Barnard (1951) [58]
Sudáfrica	---	4 a 8.5		Malan (1951) [59]
Japón	-6 a -55	6 a 8		Tamura (1954) [31]
Nuevo México (USA)	-5 a -20	4.3 a 7.2	Bipolo	Reynolds (1955) [32]
Japón	-50 a -150	4 a 8		Hatekayema (1958) [31]
Nuevo México (USA)	-5 a -60	3 a 8		Brook (1962) [60]
Hong Kong	-25	4		Wang (1963) [31]
Japón	-20	3.5 a 5.5		Takeuti (1966) [31]
Australia	-17	3		Mackerras (1968) [31]
Nuevo México	-20 a -48	4.5 a 6		Krehbiel (1974) [7]
Florida (USA)	-10 a -40	6 a 9.5	Monopolo	Jacobson (1976) [31]
Nuevo México	-47	5.5		Krehbiel (1979) [61]
Florida (USA)	-5 a -33	5 a 10	Monopolo	Maier (1986) [44]
Florida (USA)	-7 a -49	8	Monopolo y Bipolar	Koshak (1989) [50]
Florida (USA)	-9 a -48.4	3.5 a 16.6	Monopolo y Bipolar	Krider (1989) [62]
Florida (USA)	---	8	Monopolo y Bipolar	Murphy (1996) [43]
Cataluña (España)	-4.5 a 45	6.7	Monopolo	Montayá (2009) [33]
Florida (USA)	-25.1, 5.55	8.98, 5.95	Bipolar	Aranguren (2011) [7]
Navarra (España)	---	9.19	Monopolo	Aranguren (2011) [7]
Bogotá (Colombia)	---	8.42, 6.32	Bipolar	Aranguren (2011) [7]

Wilson C.T.R (1916): Se puede decir que es la investigación pionera en tratar de manera sistemática el problema del comportamiento de las tormentas eléctricas desde el punto de vista electrostático [7]. Si bien para este caso no se utilizó una red de sensores como tal, es la primera referencia que justifica uso de sensores de campo electrostático para la detección y medición de descargas. Con su estudio logró la estimación de altura y magnitud de centros de carga para descargas eléctricas atmosféricas de nube a tierra con mediciones realizadas en Inglaterra. Sin embargo, a pesar de que se propone la posibilidad de la localización de la descarga eléctrica atmosférica, no se entrega una metodología para realizar la localización de la variación de los centros de carga en las nubes de tormenta.[7], [14], [22]

Workman et al (1942): Se puede definir como una de las primeras aproximaciones realizadas experimentalmente para la localización de tormentas eléctricas usando redes de sensores de campo electrostático. Si bien se dispone de múltiples estaciones de medición ubicadas en Nuevo México Estados Unidos, se propone un

modelo matemático bipolar para las descargas, lo cual hace que el sistema de ecuaciones no lineales asociado al problema de encontrar las coordenadas de los centros de carga y la magnitud de la carga eléctrica transferida partiendo de múltiples observaciones del campo electrostático es matemáticamente complejo como para ser resuelto de manera analítica. Debido que para la época en la que fue realizada la investigación no se contaban con sistemas de cómputo lo suficientemente rápidos que permitieran tener una solución numérica, proponen un método de solución del problema de localización, usando una analogía mecánica [57].

Reynolds y Neill (1952): Se propone una mejora al trabajo realizado por Workman et al, usando una red de once estaciones de medida ubicada en Nuevo México USA, se propone un método de localización basado en análisis estadístico de los datos de las mediciones y en ensayo y error. Éste método se basa en el uso de un modelo de campo electrostático de carga puntual asumiendo condiciones de suelo plano e infinitamente conductor. A partir de estas condiciones se tabularon datos de las medidas y se establecieron tablas de comparación donde se establece la posición a partir de las medidas de campo electrostático en cada estación [32].

Jacobson y Krider (1976): Proponen un método de localización basado en optimización, el cual consiste en minimizar la diferencia de los datos de modelos matemáticos de campo electrostático de carga puntual con la de los datos medidos en múltiples estaciones mediante un procedimiento de reducción basado en mínimos cuadrados no lineales [31].

Koshak y Krider (1989): Realizan un método de análisis de los cambios en los campos electrostáticos bajo condiciones de tormenta, Desarrollan un método de localización basado en optimización de mínimos cuadrados usando como modelos de referencia, modelos de carga puntual y de dipolo puntual. Usan datos otorgados por la red de molinos de campo eléctrico de la NASA en el KSC, y de la base de la fuerza aérea en Cabo Cañaveral La Florida USA. Tienen como resultado que el uso de modelos de carga puntual plantea una buena representación de los cambios de campo electrostático para descargas de nube a tierra, mientras que el modelo dipolar es más indicado para el tratamiento de descargas intranube [50]. Sin embargo para ésta investigación, se debe tener en cuenta que la geografía del área de estudio es primordialmente plana, además que la ubicación de los sensores está especialmente

ubicada de tal manera que las condiciones de sus instalaciones sean lo más cercana a lo ideal [7].

Aranguren (2004-2011): Si bien en Colombia la investigación respecto al comportamiento de las descargas eléctricas se ha hecho desde la década de los 70 del siglo XX [6], [7], [9]. Cabe destacar el trabajo realizado por éste investigador, debido a que es el más relacionado con el problema de investigación planteado en ésta propuesta, además ha sido una trayectoria que empezó desde el pregrado con el desarrollo de un sensor de campo electrostático, la puesta en operación de una red de sensores de campo electrostático en la ciudad de Bogotá - Colombia, para el análisis del comportamiento del campo eléctrico ambiental en dicha ciudad como trabajo de maestría en el año 2006 [9]. Donde adicional a la implementación del método de localización mediante algoritmo de optimización de mínimos cuadrados, se planteó el uso de algoritmos eurísticos para encontrar los parámetros de las descargas como los algoritmos genéticos. Además de esto se establecieron criterios para la corrección de medidas de campo electrostático considerando las deformaciones del campo influenciadas por las características de construcción en la ubicación del sensor. En cuanto a esto, se debe tener en cuenta que en ésta investigación se hacen ajustes a los modelos puntuales de campo mediante aproximaciones lineales, agregando componentes proporcionales a los modelos existentes.

Adicional a lo anterior, se destaca el trabajo doctoral realizado por Aranguren (2011)[7], donde se extiende el análisis del campo realizado en su trabajo previo de maestría, donde cabe destacar el estudio que realiza en sensores ubicados en suelo montañoso considerando como caso de estudio la red de sensores ubicada en la comunidad de Navarra en España. Donde uno de los aspectos que cabe destacar de éste estudio consiste en que para situaciones donde las condiciones del suelo no es plano para los puntos de observación, los modelos de carga puntual con suelo ideal no son precisos para describir el comportamiento del campo eléctrico. Pero éste trabajo no plantea el hecho de encontrar un modelo que permita la localización en situaciones donde el suelo no es plano, ya que una aproximación al comportamiento del campo eléctrico encontrada por éste investigador, consiste en encontrar el comportamiento de éste campo respecto a la distancia horizontal entre el sensor y el centro de carga aproximando el comportamiento a una función de regresión exponencial basándose en simulaciones de solución del campo mediante elementos finitos [7]. Sin embargo éste modelo no relaciona de manera directa las variables asociadas

a la localización espacial de los centros de carga en las tormentas, ya que no tiene en cuenta la altura del centro de carga ni la magnitud del centro de carga, por lo que éste modelo no puede ser considerado para el problema de localización.

A pesar de que en éste trabajo y en otros trabajos previos, se ha mostrado que existen diferencias entre los modelos de campo electrostático asociados a las tormentas cuando se tiene una topografía montañosa respecto a un suelo idealmente plano como se indicó en el desarrollo del Capítulo 2. Es necesario evaluar los métodos de localización, la tolerancia que éstos tienen frente a los posibles errores existentes en los valores medidos del campo eléctrico y los cambios bruscos ΔE asociados a los eventos de descarga eléctrica atmosférica, no solamente debidos a la topografía, sino a los errores que se pueden presentar tanto a la incertidumbre en las medidas debidas a los sensores, la ubicación espacial, las perturbaciones debidas a fuentes de campo eléctrico artificiales, e incertidumbres del modelado. Ya que a partir de éstos métodos se puede evaluar la sensibilidad al error que pueden tener los métodos de análisis de la información de las redes de sensores de campo eléctrico.

En el desarrollo de éste capítulo, se estudiará el comportamiento de los algoritmos de localización con los que se pretende estudiar el comportamiento de la carga eléctrica transferida y su localización espacial.

Para ello se definirá este problema como un problema de optimización donde se encontrarán los parámetros asociados a las descargas eléctricas atmosféricas, de acuerdo a los modelos de carga puntual seleccionados. Para este problema de optimización se debe definir la función objetivo y las variables de decisión asociadas al modelo de campo electrostático. Adicional a esto, también se definirán las restricciones asociadas al problema de optimización planteado.

Una vez se analiza y se define éste problema de optimización, se hará un estudio del problema encontrado y a partir del análisis tanto de su función objetivo y restricciones asociadas, se definirán, describirán e implementarán algunos métodos de solución. Ya que como se indicará más adelante, para los modelos puntuales de campo eléctrico, es posible encontrar de manera exacta las derivadas de primer y segundo orden respecto a sus variables asociadas. Esto representará una ventaja respecto a la definición de los métodos de solución, ya que permitira obtener, gradiente, Jacobianos y Hessianos requeridos para éstos métodos.

Cabe destacar que los métodos de solución acá propuestos, son algoritmos iterativos los cuales buscan la solución a partir de la definición de una solución tentativa inicial o semilla, por ésta razón también se definirá una manera de determinar la semilla de los métodos. Adicional a lo anterior también se debe definir los criterios de parada del algoritmo, basándose en la tolerancia al error entre los valores del campo de referencia o medido y los valores estimados por los modelos, la cantidad de iteraciones del algoritmo entre otros.

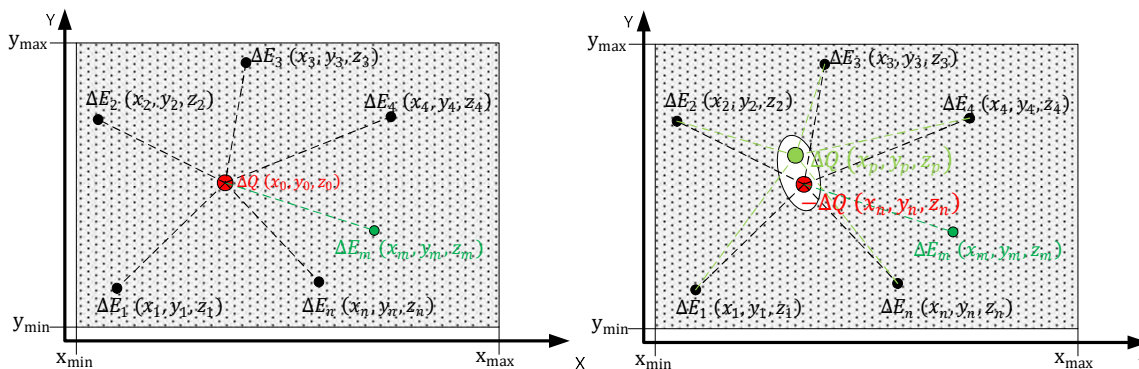
Adicionalmente, se planteará de manera alternativa, la solución del problema utilizando algoritmos heurísticos como los algoritmos evolutivos para la solución del problema.

Cabe notar, que para cada uno de los algoritmos implementados, se realizará un análisis de sensibilidad, generando datos mediante simulación de posiciones y cargas transferidas e incertando un error de medición mediante simulación, para luego finalmente realizar una comparación de los algoritmos utilizados, su sensibilidad al error y tiempo computacional.

3.1 El Problema de la localización

Desde el punto de vista electrostático, el problema de localización consiste en encontrar la magnitud y polaridad de los cambios de los centros de carga involucrados en el fenómeno de la descarga eléctrica atmosférica, su altura y ubicación geográfica.

En general, se puede decir que, el problema de localización, permite estudiar el comportamiento de las descargas eléctricas atmosféricas. Estos modelos fueron descritos en el Capítulo 2, allí se puede observar que éstos dependen del tipo de descarga o la complejidad deseada para la descripción del campo. Además, definen la cantidad de parámetros que deben ser encontrados ya que de acuerdo a cantidad de variables involucradas en el modelo que describe el campo, se definirá la cantidad mínima de puntos de observación que se deben tener en cuenta para el problema de localización.

Figura 3-1: El Problema de Localización

La Figura 3-1 muestra un punto de vista geométrico el problema de localización, mediante el cual, a partir de medidas del cambio "brusco" en el campo eléctrico ΔE desde m puntos distintos de observación, ubicados en una región de interés, se pretende encontrar los parámetros asociados a los cambios en los centros de carga ΔQ y sus coordenadas asociadas.

En general, se puede decir que para encontrar dichos parámetros, se debe contar con los siguientes elementos para la localización de un evento de descarga:

Una región de observación: Ésta puede estar limitada por la resolución mínima que los dispositivos de medida de campo electrostático puedan tener y su rango de medidas. Para el caso del campo electrostático dependerá del mínimo valor del campo eléctrico E que pueda ser detectado por el sensor.

Varios Puntos de Observación: Se requiere de una red de sensores idealmente sincronizados que detecten cambios en una variable, o varias variables debidas a un evento, para el caso de la descarga eléctrica atmosférica, ésta variable es el cambio en el campo electrostático ΔE debido a cambios en los centros de carga en las nubes de tormenta. Se debe disponer como mínimo de la misma cantidad de puntos de observación respecto a la n cantidad de parámetros del modelo que se deben encontrar. La Tabla 3-3 muestra la cantidad mínima de n puntos de observación requeridas para cada uno de los modelos, siendo el modelo Q el que menos puntos requiere. Sin embargo, es de notoria importancia contar con mediciones redundantes relativas al mismo evento. Como se indicará posteriormente, ésta redundancia permitirá la convergencia del método de localización utilizado y la reducción en la incertidumbre de los parámetros encontrados.

Modelado del Evento: Se requiere disponer de un modelo que relacione una variable observable del evento con la localización geográfica del mismo, la ubicación de los puntos de observación o alguna variable geométrica relativa del evento a los sensores. Para el caso de mediciones de campo electrostático la variable a observar es el cambio brusco en el campo electrostático ΔE debido a cambios en los centros de carga ΔQ de la nube de tormenta. Los modelos que utilizados para ésta tarea, fueron descritos de manera detallada en el Capítulo 2. Cabe notar que estos modelos se considera que todos los sensores se encuentran idealmente sobre la superficie terrestre y acorde a la disposición típica de este tipo de sensores (ver 1.4.2) se tendrá información de la componente en z del campo eléctrico. Adicional a lo anterior, es importante aclarar que éste modelo debe relacionar la ubicación espacial del punto de observación, no necesariamente la función matemática del modelo debe ser la misma para todos los puntos de observación, éstas pueden tener ajustes y modificaciones acordes a las condiciones de instalación de las estaciones de medida [7], eso si se cuenta con la restricción que los parámetros de los modelos deben ser los mismos para todos los puntos de observación.

Método de localización: Dados los elementos descritos anteriormente, con base al modelo utilizado, se debe realizar un método de localización que permita encontrar las variables del evento. Para ello, se puede definir un problema de programación no lineal en caso de que los modelos implicados no tengan una relación lineal entre la variable medida y las variables del evento, para este caso se usan técnicas como los métodos de reducción de mínimos cuadrados no lineales u otros métodos de optimización.

Filtrado y corrección: Consiste en contrarrestar los errores en las mediciones, para así reducir el área o región de incertidumbre de la localización, estos ajustes van desde la calibración del instrumento de medida, ajustes al modelo de cada punto de observación y ajustes con información procedente de otras redes de detección de tormentas o realizados por ensayo y error.

En general, el problema de localización es un problema que se puede ver en las siguientes etapas:

- Observación y medición del evento
- Definición del problema de optimización.
- Selección del método de solución.
- Selección de la semilla o parámetros de arranque.
- Ejecución del método

- Evaluación de criterios de parada
- Análisis de la solución encontrada.

En general, el problema de localización y caracterización de las cargas eléctricas en tormentas eléctricas, consiste en un problema de identificación de parámetros, donde a partir de varias observaciones de un evento se deben encontrar los valores de los parámetros de un modelo de ΔE que más se ajusten a la información observada de un mismo evento. Esto se puede ver como un problema de optimización, donde sus variables, su función objetivo y restricciones serán descritas en las siguientes secciones de éste capítulo.

3.1.1 La función Objetivo

Como se describió anteriormente, el problema consiste en encontrar n parámetros de un modelo mediante un problema de optimización. para ello es necesario definir la función objetivo, las n variables necesarias para describir el comportamiento del campo electrostático debido a una descarga eléctrica atmosférica a partir de las medidas $\overrightarrow{\Delta E_m} = [\Delta E_{m_1}, \Delta E_{m_2}, \dots, \Delta E_{m_m}] \in \mathbb{R}^m$ de los cambios en el campo eléctrico ΔE en $m \geq n$ puntos distintos de observación.

Variables Objetivo: Corresponden a los parámetros $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T \in \mathbb{R}^n$ de los modelos asociados relacionados en la función $\Delta E_i(x_i, y_i, X)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) en la posición espacial (x_i, y_i) de cada punto de observación. La descripción de estas variables depende del modelo seleccionado para describir el cambio brusco del campo eléctrico ΔE asociado al fenómeno de la descarga eléctrica atmosférica. Para los modelos típicos de carga puntual éstas se encuentran definidas en la Tabla 3-3 y son resumidas en la Tabla 3-2

Tabla 3-2: Variables Objetivo

Modelo	n	Variables Objetivo
Modelo Q Carga Puntual	4	$X = [x_0, y_0, z_0, \Delta Q]$
Bipolar	7	$X = [x_n, y_n, z_n, x_p, y_p, z_p, \Delta Q]$
Dipolo Vertical	5	$X = [x_0, y_0, z_n, z_p, \Delta Q]$
Momento Dipolar	6	$X = [x_d, y_d, z_d, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z]$
Múltiples cargas	$4N_q$	$X = [x_1, y_1, z_1, \Delta Q_1, x_2, y_2, z_2, \Delta Q_2, \dots, x_{N_q}, y_{N_q}, z_{N_q}, \Delta Q_{N_q}]$

Una vez definidas las variables objetivo, el problema consiste en encontrar los parámetros del modelo, de tal manera que la diferencia entre los valores de $\overrightarrow{\Delta E} = [\Delta E_1, \Delta E_2, \dots, \Delta E_m] \in \mathbb{R}^m$ estimados

por el modelo y los ΔEm medidos en cada punto sea mínima, es decir se desea minimizar el error cuadrático medio entre las mediciones y los valores estimados tal como se indica en la ecuación (3-1).

$$\min_{X_1, X_2, \dots, X_n} F(X) = \sum_{i=1}^m (\Delta Em_i - \Delta E_i(X))^2 \quad (3-1)$$

El problema anterior corresponde a un problema de reducción de mínimos cuadrados. De manera vectorial (3-1) se puede expresar como buscar la mínima distancia entre el vector de los valores medidos $\overrightarrow{\Delta Em}$ y los valores calculados por el modelo asociado $\overrightarrow{\Delta E}$ en cada punto de observación:

$$\min_{X_1, X_2, \dots, X_n} F(X) = \|\overrightarrow{\Delta Em} - \overrightarrow{\Delta E}(X)\|^2 \quad (3-2)$$

Tomando como ejemplo el modelo Q. se tiene que las variables de decisión o grados de libertad están dados por $X = [x_0, y_0, z_0, \Delta Q]$ por tanto la función objetivo estará dada por:

$$\min_{\Delta Q, x_0, y_0, z_0} \|\overrightarrow{\Delta Em} - \overrightarrow{\Delta E}(\Delta Q, x_0, y_0, z_0)\|^2 \quad (3-3)$$

En algunas investigaciones, como es el caso de Aranguren (2006) [9] (2011) [7] otra manera de observar la función objetivo anteriormente planteada, la cual fue inicialmente propuesta por Jacobson y Krider (1976) [31], consiste en minimizar el estadístico χ^2 del residuo, es decir, de acuerdo con la ecuación (3-4) $F(x) = \chi^2$ caracteriza la dispersión de los valores medidos respecto a los valores estimados por los modelos en cada punto de observación, relacionándolos con el

$$\min_{X_1, X_2, \dots, X_n} F(X) = \sum_{i=1}^m \frac{(\Delta Em_i - \Delta E_i(X))^2}{\sigma_i^2} \quad (3-4)$$

Dónde σ_i corresponde al error de medición en el sitio i , el cual es determinado a partir de parámetros de calibración del dispositivo de medida y de la incertidumbre del sensor [7], [9], [31], [63]. Sin embargo ésta incertidumbre es desconocida, pero puede ser estimada a partir de las mediciones [63] tal como se indica en la ecuación (3-5) cuando se asume que todos los sensores son iguales y tienen la misma incertidumbre.

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 = \frac{1}{m-n} \sum_{i=1}^m (\Delta Em_i - \overline{\Delta Em})^2 \quad (3-5)$$

Dónde $\overline{\Delta Em}$ es el promedio aritmético de las medidas en los m puntos de observación, y $v = m - n$ corresponde a los grados de libertad definidos como la diferencia entre el número de medidas y el número de parámetros o variables objetivo.

A pesar de lo anterior, la elección de la incertidumbre σ_i para cada sensor ($i = 1, 2, \dots, m$) no es un problema trivial, ya que es un parámetro que depende del estado físico de los sensores, las condiciones de la instalación de los mismos, entre otros factores que hacen que no sea un parámetro estático. Por otra parte, una mala elección podría evitar la convergencia de los algoritmos de optimización, ya que, como se indicará en la sección 3.1.4 se utiliza como criterio de parada un valor proporcional a v [31].

Debido a que los análisis desarrollados en el desarrollo de esta tesis, serán realizados con base a datos generados por simulación computacional, se tomará como función objetivo del problema, la función expresada en la ecuación (3-2), la cual es equivalente a la función objetivo expresada en (3-4) si se considera que los valores de σ_i no dependen de las variables objetivo y los métodos desarrollados pueden ser aplicados a ambas funciones.

Es importante mencionar, que a partir de la selección tanto de la función objetivo como de las variables, de esto dependerá el método de búsqueda de la solución, la selección de la semilla y el criterio de parada del algoritmo lo cuál será especificado en las siguientes secciones.

3.1.2 Restricciones

En los problemas de optimización, pueden existir restricciones en los parámetros o variables de optimización, éstas restricciones están asociadas a limitaciones físicas de las variables así como de impedimentos matematicos como restricciones de valores reales y valores indeterminados. Es de gran importancia definir éstas restricciones, ya que a apartir de éstas se define el tipo de problema y sus posibles metodos de solución.

Una de las restricciones más importantes que se deben tener en cuenta para el desarrollo de éste problema, consiste en definir el modelo que representará el campo en cada punto de observación.

Tabla 3-3: Modelos Campo Electroestático Sobre la Superficie Plana

Modelo	Expresión Matemática	Parámetros a Encontrar (Variables Objetivo X)
Modelo Q Carga Puntual ($n = 4$)	$\Delta E_i = \frac{\Delta Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{(z_0 - H_p)}{(D + (z_0 - H_p)^2)^{3/2}} \right)$ Con: <ul style="list-style-type: none"> $D = (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2$ 	Centro de Carga <ul style="list-style-type: none"> Cambio Carga: ΔQ P. Geográfica: x_0, y_0 Altura: z_0
Bipolar ($n = 7$)	$\Delta E_i = \frac{\Delta Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{z_p - H_p}{(D_p + (z_p - H_p)^2)^{3/2}} - \frac{z_n - H_p}{(D_n + (z_n - H_p)^2)^{3/2}} \right)$ Con: <ul style="list-style-type: none"> $D_p = (x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2$ $D_n = (x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2$ 	Centro de Carga Positivo <ul style="list-style-type: none"> Cambio Carga*: ΔQ P. Geográfica: x_p, y_p Altura: z_p Centro de Carga Negativo <ul style="list-style-type: none"> P. Geográfica: x_n, y_n Altura: z_n
	$\Delta E_i = \frac{\Delta Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{z_p - H_p}{(D + (z_p - H_p)^2)^{3/2}} - \frac{z_n - H_p}{(D + (z_n - H_p)^2)^{3/2}} \right)$ Con: $D = (x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2$	Centro de Carga <ul style="list-style-type: none"> Cambio Carga: ΔQ P. Geográfica: x_0, y_0 Alturas Cargas: z_n, z_p
	$\Delta E_i = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 \ \vec{r}_i\ ^3} \left(\frac{3z_d(\vec{\Delta p} \cdot \vec{r}_i)}{\ \vec{r}_i\ ^2} - \Delta p_z \right)$ Con: <ul style="list-style-type: none"> $\vec{r}_i = (x_i - x_d)\hat{i} + (y_i - y_d)\hat{j} + (-z_d)\hat{k}$ $\vec{\Delta p} = \Delta p_x\hat{i} + \Delta p_y\hat{j} + \Delta p_z\hat{k}$ 	Localización Dipolo <ul style="list-style-type: none"> Altura: z_d P. Geográfica: x_d, y_d Momento Dipolo <ul style="list-style-type: none"> Componentes $\vec{\Delta p}$: $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$
Modelo Múltiples cargas ($n = 4Nq$)	$\Delta E_i = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{k=1}^{Nq} \left(\frac{\Delta Q_k (z_k - H_p)}{(D_k + (z_k - H_p)^2)^{3/2}} \right)$ Con: <ul style="list-style-type: none"> $D_k = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2$ 	Localizar Multipolos Para $k = 1, 2, \dots, Nq$: <ul style="list-style-type: none"> Cambio Carga: ΔQ_k P. Geográfica: x_k, y_k Altura: z_k

** Se considera para este modelo Cambios ΔQ de igual magnitud y signo opuesto ver sección 2.3.2
 H_p Corresponde a la altura del plano de tierra en msnm, note que si $H_p = 0$ corresponde a los
 modelos ideales planteados en la literatura.
 Si $D_n = D_p$ en el modelo bipolar para la representación bipolar propuesta por Jacobson y Krider
 [31], para este caso $n = 5$ ya que $x_n = x_p$ y $y_n = y_p$.

Cabe aclarar que éste modelo no necesariamente debe ser igual para todos los puntos de oberservación, ya que como se indica en Aranguren (2011) debido a que, por lo general los sitios donde se ubican los sensores de campo eléctrico no corresponden a condiciones ideales, por lo que es necesario realizar ajustes a los modelos usados para cada estación de medida[7]. Sin embargo se debe tener en cuenta que los modelos asociados a cada punto de

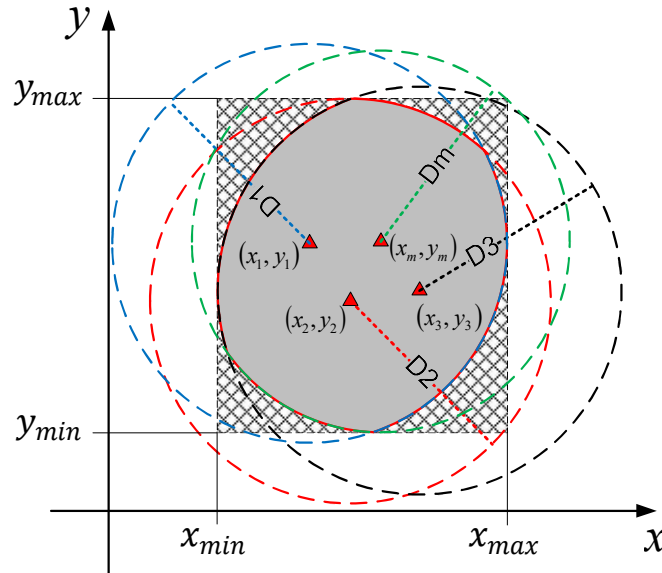
observación deben depender de los mismos parámetros asociados a la descarga.

La Tabla 3-3 muestra los modelos típicos de carga puntual utilizados para resolver el problema de optimización, los cuales fueron discutidos en el desarrollo del capítulo 2, en general se puede decir que las restricciones debida a los modelos, son restricciones de tipo igualdad. De acuerdo con lo anterior, la restricción igualdad asociada al problema estará dada por:

$$\Delta E_i = \Delta E_i(x_i, y_i, X) \quad (3-6)$$

Adicional a la restricción del problema referente al modelo de carga puntual asociado al problema, se hará mención a otras posibles restricciones sobre los parámetros de la descarga que se pueden tener en cuenta en el problema, las cuales están asociadas a limitaciones físicas tanto de los instrumentos de medida, como restricciones matemáticas en los modelos del campo. Sin embargo, en las investigaciones referenciadas en éste trabajo no son tratadas o son omitidas.

Figura 3-2: Área de cobertura de los sensores



Entre éstas restricciones, se debe tener en cuenta, que los sensores como los molinos de campo eléctrico (ver sección 1.4.2) tienen limitación de cobertura, su radio de observación está limitado por la resolución mínima, sensibilidad y tolerancia, y bajo condiciones ideales, ésta cobertura puede ser vista como un radio de cobertura tal como se indica en la Figura 3-2 Donde se muestra una situación donde se tienen cuatro sensores y el área de cobertura la cual está dada por la intersección de las áreas de

cobertura de todos los sensores que se asumen circunferencias de radio D_i . para cada punto de observación de coordenadas (x_i, y_i) .

Sin embargo, definir ésta área de cobertura es un problema geoméricamente complejo, por lo que se podría definir un área rectangular donde estarán los valores máximos y mínimos de las coordenadas espaciales de las descargas de esta manera se puede definir las restricciones del problema como:

$$\begin{aligned} x_{min} &\leq x \leq x_{max} \\ y_{min} &\leq y \leq y_{max} \end{aligned} \quad (3-7)$$

Dónde x y y corresponden respectivamente a:

- x_0 y y_0 del modelo Q
- $[x_n \ x_p]$ y $[y_n \ y_p]$ para el modelo bipolar.
- x_d y y_d del modelo momento dipolar.
- $[x_1 \ \dots \ x_{Nq}]$ y $[y_1 \ \dots \ y_{Nq}]$ para el modelo de múltiples cargas.

Adicional a las coordenadas espaciales mencionadas anteriormente, se debe tener en cuenta la restricción de altura z de los centros de carga en los modelos, es decir que se tiene una restricción física al considerar el suelo como un conductor (ver sección 2.1.5), y para éstos casos, se considera que no hay cargas eléctricas bajo el suelo, por lo que si se considera que un suelo plano a una altura H_p Entonces $z > H_p$. Adicionalmente se debe tener en cuenta que la altura máxima estará dada por la altura máxima de la nube de tormenta (típicamente hasta la tropopausa de acuerdo a la sección 1.2) o la altura de la ionósfera en el caso de las descargas atmosféricas superiores (ver sección 1.3.1) es decir $z \leq z_{max}$. Cabe notar que debido a la estructura eléctrica de las nubes de tormenta, los centros de carga son predominantemente negativos en la base de la nube y positivos en la parte superior, por lo que una análisis del comportamiento de éstos centros de carga permitiría definir un valor límite para el valor de z en los centros de carga que por lo general $z_{min} > H_p$ tal como se indica en la Tabla 2-4 de la sección 2.4 donde se muestran los rangos típicos de la altura de los centros de carga tanto para centros de carga positivos y negativos, por lo cual se puede definir una restricción para la altura de los centros de carga tal como se indica en la ecuación (3-8).

$$H_p < z \leq z_{max} \quad (3-8)$$

Uno de los aspectos importantes a la hora de definir las restricciones, es que el denominador de las funciones que definen los modelos expresados en la Tabla 3-3 el argumento de la raíz par

presente en ellos no pueden ser negativos ya que esto conduce a valores complejos del campo, sin embargo esta restricción siempre se cumple dado que éste argumento está dado por la suma de elementos al cuadrado los cuales siempre son positivos ya que gráficamente implican una distancia entre el punto de observación y el cambio en el centro de carga ΔQ . Adicional a lo anterior, note que los denominadores no pueden ser cero, sin embargo esta restricción implicaría que la posición de los centros de carga es igual a la de los sensores, algo que se evita con la restricción especificada en (3-8).

En cuanto a restricciones sobre los centros de carga, éstas son omitidas dado que ΔQ para todas las expresiones de la Tabla 3-3 puede tener valores positivos y negativos, sin embargo, se pueden definir límites basándose en información histórica del comportamiento en la transferencia de los centros de carga.

A pesar de que se definieron las anteriores restricciones a las variables del problema, se debe tener en cuenta que con el fin de simplificar la solución del problema, las restricciones especificadas en las ecuaciones (3-7) y (3-8) serán omitidas, pero aun así, serán tenidas en cuenta para la selección de la semilla, tal como se indicará en la sección 3.1.3.

3.1.3 Selección de la semilla o valor inicial.

Dado que la solución del problema de identificación de parámetros, se realizará por métodos iterativos que tienen como fin principal encontrar los parámetros de la descarga eléctrica atmosférica que hagan que la diferencia entre múltiples observaciones de ΔE y los valores calculados a partir de un modelo en m puntos de observación distintos sea mínima.

Para lograr esto, es necesario que los métodos de optimización sean iniciados en un valor inicial o semilla, la cual consiste en asumir valores a las variables objetivo los cuales se pueden asumir como solución inicial o tentativa al problema. Es decir consiste en definir valores numéricos para los n parámetros del modelo de carga puntual para las coordenadas y variaciones de carga eléctrica de los centros de carga implicados en el modelo (ver Tabla 3-3) los cuales definidos en un vector X_s cuyos componentes son los parámetros del modelo tal como se indica en (3-9). Por ejemplo, para el modelo Q $n=4$ y $X_s = [x_0, y_0, z_0, \Delta Q]$ es decir se deben encontrar valores iniciales para la ubicación espacial x_0, y_0, z_0 y el cambio en el centro de carga ΔQ .

$$X_s = [X_1, X_2, \dots, X_n] \in R^n \quad (3-9)$$

El uso de algoritmos iterativos para la solución del problema de identificación de parámetros de las descargas eléctricas atmosféricas ha sido tratado en algunas investigaciones como las realizadas por: Jacobson y Krider (1976) [31], Krehbiel et al (1979)[61], Koshak and Krider (1989)[50], Koshak and Krider (1994)[64], Aranguren (2006) [9] y Aranguren (2011)[7] dónde la selección de la semilla es realizada de manera arbitraria. No indican una metodología detallada de como seleccionar los valores iniciales de los parámetros de la descarga para iniciar los algoritmos de búsqueda de la solución.

Sin embargo para la elección de la semilla, es importante reconocer el comportamiento de las variables asociadas al modelo del campo en la región dónde se realizará el estudio, debido a que la elección de esta puede perjudicar el algoritmo de optimización utilizado para la solución, desde el punto de vista de la convergencia, error de estimación y cantidad de iteraciones lo cual puede estar ligado a la convexidad del problema de optimización en los intervalos de validez de los parámetros de la descarga los cuales fueron discutidos en las restricciones especificadas en la sección 3.1.3.

Para la selección de los n parámetros de la semilla X_s se pueden tener en cuenta diferentes aspectos, desde la selección por criterio empírico de los valores así como el comportamiento estadístico de las variables involucradas en el problema de localización, es decir las coordenadas espaciales de los centros de carga involucrados y la carga transferida por cada uno de ellos (ver Tabla 3-3) además de las limitaciones físicas y matemáticas de éstas discutidas en las restricciones del problema en la sección 3.1.2.

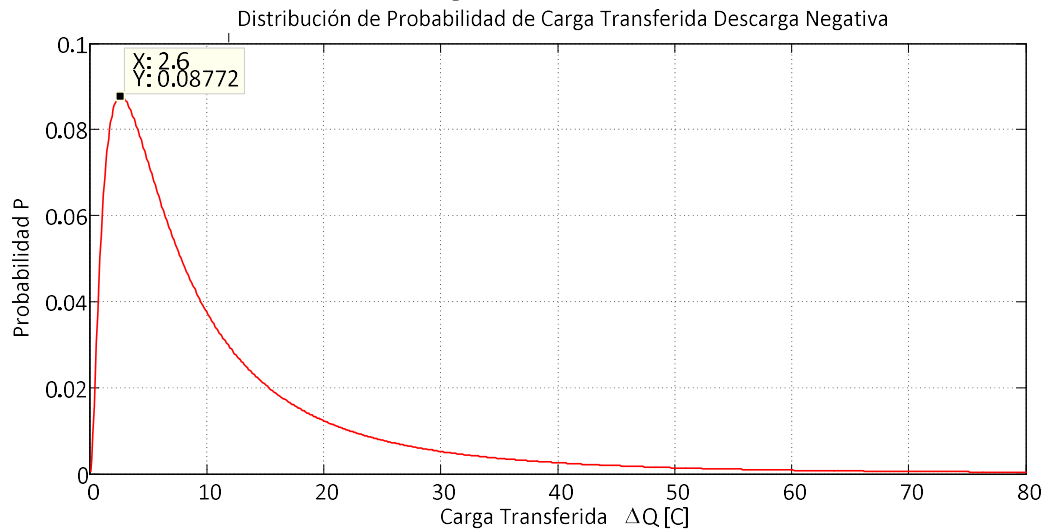
Tener en cuenta éste estudio estadístico consiste en reconocer las distribuciones de probabilidad de los parámetros de las descargas, un ejemplo de estas se puede encontrar en Aranguren (2011) donde tomando como referencia los datos de la red de sensores de la Florida Estados Unidos [7] se obtiene que la carga transferida ΔQ se le puede asociar una distribución de probabilidad Log-normal.

$$p(\Delta Q_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta Q_i\sigma_{\ln(Q)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\Delta Q_i) - \ln(\mu_Q)}{\sigma_{\ln(Q)}} \right)^2 \right] \quad (3-10)$$

La ecuación (3-10) muestra la expresión de la distribución de probabilidad asociada a ΔQ , dónde: μ_Q y $\sigma_{\ln(Q)}$ corresponden a la

mediana y la varianza de la distribución. Tomando como patrón los datos del KSC, $\mu_Q = 7.5C$ y $\sigma_{\ln(Q)} = 1.02$ para descargas debidas a centros de carga negativos [7].

Figura 3-3: Distribución de Probabilidad de las Descargas Negativas KSC



La Figura 3-3 muestra el comportamiento de la distribución de probabilidad con los parámetros especificados en la ecuación (3-10) para descargas negativas, donde se muestra que los valores de ΔQ más probables se encuentran alrededor de $2.6C$ lo cual indica de acuerdo con investigaciones anteriores, que para las descargas positivas la distribución de probabilidad es distinta debido a que los centros de carga positivo se encuentran más alejados del suelo [7].

A pesar de lo anterior, se debe tener en cuenta que ésta distribución está ligada a los datos de una región específica de estudio, sus características climáticas y geográficas. Además puede tener un comportamiento diferente cuando las descargas se consideran de centros de carga positivos, las cuales presentan magnitudes de carga mayores debido a que éstos se encuentran más alejados del suelo [7] y son menos probables que las descargas negativas tal como se indicó en la sección 1.3.1.

Respecto a la ubicación espacial de los centros de carga, se debe tener en cuenta, que no existe manera de definir el comportamiento de las descargas eléctricas atmosféricas en una región en particular, no hay manera de definir una distribución de probabilidad de las coordenadas espaciales de los centros de carga ni de la carga transferida sin tener información histórica o estadística de las variables implicadas en el modelo utilizado.

Por esta razón para la generación de aleatoria de los valores iniciales, se considerará por simplicidad una distribución de probabilidad uniforme ya que para la región de dónde se extrajo el relieve, no se contó con información previa que permitiera establecer una distribución de probabilidad del comportamiento espacial de las tormentas. Para establecer ésta distribución se considerarán los valores límites establecidos para las coordenadas en las ecuaciones (3-7) y (3-8) para los parámetros respecto a las coordenadas espaciales de las variaciones de los centros de carga de los modelos establecidos en la Tabla 3-3.

$$\begin{aligned} p(x) &= U(x_{min}, x_{max}) \\ p(y) &= U(y_{min}, y_{max}) \\ p(z) &= U(z_{min}, z_{max}) \end{aligned} \quad (3-11)$$

En conclusión para definir los valores iniciales de las variables objetivo (ver Tabla 3-2) se pueden tomar valores aleatorios tomando como criterio, las distribuciones de probabilidad de éstas variables y sus restricciones.

Cabe notar que la mayoría de los algoritmos de optimización implementados requieren de un solo valor inicial de la semilla para iniciar es decir basta con seleccionar un solo valor de X_s bajo los criterios explicados anteriormente. Sin embargo debido a que el problema de optimización no es convexo éste criterio de selección hace que los algoritmos de optimización fallen.

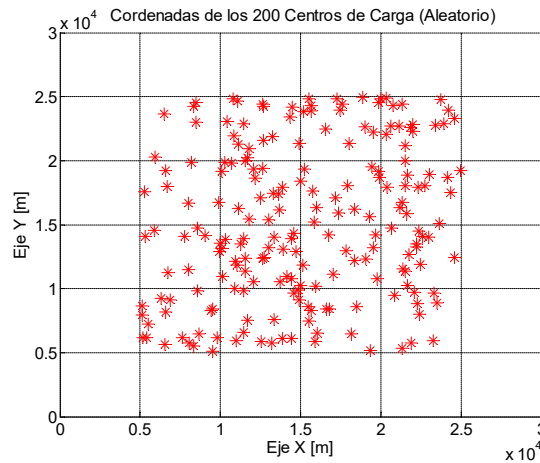
Por esta razón se implementó un método de arranque múltiple, donde se genera un conjunto $S = \{X_{s1}, X_{s2}, \dots, X_{sN_s}\}$ de N_s semillas seleccionadas bajo el criterio especificado anteriormente, de tal manera que la semilla inicial será determinada evaluando la función objetivo para cada una de las semillas X_{si} con $i = 1, 2, \dots, N_s$ de S , seleccionando como valor inicial la semilla que presente el menor valor de la función objetivo tal como se indica en la ecuación (3-12) es decir se genera la mejor semilla de las generadas aleatoriamente.

$$X_s = \arg \min \{F(X_{si}) | X_{si} \in S\} \quad (3-12)$$

Cabe notar que una de las dificultades de éste método de selección consiste en que se deben realizar N_s evaluaciones de la función objetivo $F(X)$ del problema, lo cual implica un costo computacional más elevado respecto a seleccionar una semilla aleatoria. Sin embargo con el progresivo aumento de la capacidad de cálculo de los equipos de cómputo hacen que este tiempo sean relativamente cortos para los modelos de carga puntual.

Para la selección de los valores iniciales se tomó un área plana cuadrada de 30Km de lado tomando como referencia el área descrita en la sección 1.6.1. Para ésta área se definió como límites de estudio: $x_{min} = 5km$, $x_{max} = 25km$, $y_{min} = 5km$ y $y_{max} = 25km$ tal como se muestra en la Figura 3-4. Además de los límites en las coordenadas x,y se debe tener en cuenta los límites de la distribución de probabilidad en la altura z de los centros de carga (Ver ecuación (3-8)) teniendo en cuenta la estructura eléctrica de las nubes de tormenta detallada en la sección 1.2.1.

Figura 3-4: Ejemplo de $N_s = 200$ Puntos de Arranque en una Rejilla o en Ubicación Aleatoria



La Figura 3-4 muestra la ubicación en el plano x,y de la ubicación de los elementos del conjunto S con $N_s = 200$, si bien se pueden observar algunas regiones donde la densidad de puntos generados es menor, esto se puede mejorar incrementando el número de elementos generados para el conjunto S , sin embargo, a pesar de que éste método busca que la semilla esté más cerca del valor óptimo, no se puede garantizar nada respecto a la convergencia de los métodos de optimización empleados para la solución del problema.

3.1.4 Convergencia Criterio de parada y Condición de Optimalidad

Como se indicará más adelante los métodos de optimización implementados siguen un esquema iterativo donde en cada iteración un nuevo y con suerte mejor valor de los parámetros estimados de X es generado con el fin de encontrar los valores óptimos de $X^* = [X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*]^T$. Dado que de acuerdo con la función objetivo planteada en la sección 3.1.1 y los modelos asociados a ΔE son no lineales, la solución entregada por los métodos de optimización implementados es una aproximación al valor de X^* [65], por lo

tanto es necesario seleccionar un criterio mediante el cual se determine que los algoritmos de optimización han llegado a un valor óptimo.

Dentro de las investigaciones relacionadas con la solución de éste problema, cabe destacar la condición de optimalidad propuesta por Jacobson y Krider [31] para la función objetivo expresada en la ecuación (3-4) donde se debe considerar un valor adecuado del estadístico χ^2 proporcional a los grados de libertad $\nu = m - n$ o diferencia entre el número de observaciones o medidas del campo y la cantidad de parámetros del modelo utilizado para la solución del problema. Es decir que el valor de la función objetivo evaluada en los parámetros X^* debe ser menor al criterio planteado tal como se observa en la ecuación (3-13).

$$\sum_{i=1}^m \frac{(\Delta E m_i - \Delta E_i(X^*))^2}{\sigma_i^2} \leq \alpha \nu \quad (3-13)$$

Dónde para tormentas cercanas $\alpha = 0.8$ y para tormentas lejanas $\alpha < 0.8$ con el fin de compensar los valores pequeños de los cambios en el campo ΔE los cuales pueden llegar a ser comparables con la resolución mínima del instrumento de medida o su error de digitalización.

Dado que para la condición expresada en la ecuación (3-13) se requiere conocer las incertidumbres de medida, es necesario encontrar otras condiciones para encontrar el valor óptimo X^* de los parámetros del problema. Para ello es necesario definir criterios que permitan definir:

- Criterios de convergencia: son condiciones que muestran que después de una cantidad limitada de iteraciones, no se presentará una notoria mejoría en el valor de los parámetros de X^* y de esta manera se pueden establecer un número límite de iteraciones.
- Criterio de optimalidad: tiene como fin evaluar "la calidad" de los valores de los parámetros X^* encontrados en cuanto que tan próximo hacen que el valor de la función objetivo sea óptimo teniendo en cuenta una tolerancia.
- Criterio de Parada: son condiciones mediante las cuales se terminan las iteraciones de los métodos de optimización implementados, los cuales se pueden determinar a partir de los criterios de optimalidad y de convergencia planteados.

Estos criterios dependerán tanto de las características del problema de optimización como del método utilizado para su solución. Para el problema planteado a partir de la función

objetivo dada en la ecuación (3-2) y las restricciones dadas por las funciones de los modelos especificados en la Tabla 3-3 y las desigualdades especificadas en las ecuaciones (3-7) y (3-8).

Para un problema con restricciones, las condiciones de Kuhn-Tucker son una manera típica de evaluar las condiciones de optimalidad de un problema de optimización basándose en la evaluación de los Lagrangianos del problema [65]. Sin embargo como se indicó en la sección 3.1.2, las restricciones desigualdad serán omitidas para simplificar el problema, las restricciones igualdad debidas al modelo de campo serán incluidas en la función objetivo haciendo que el problema pueda ser considerado como un problema sin restricciones, haciendo que la condición de optimalidad está dada por: $\|\nabla F(X^*)\|_2 = 0$ es decir el gradiente de la función para los valores óptimos de los parámetros es cero y para éste parámetro la matriz del Hessiano es positiva definida $H(X^*) > 0$. Pero dado que los métodos de optimización, se espera que la solución converja a un valor aproximado de X^* se debe definir una tolerancia ε_V del valor del gradiente en el valor óptimo encontrado, definiendo la condición de optimalidad como:

$$\|\nabla f(X^*)\|_2 \leq \varepsilon_V \wedge H(X^*) > 0 \quad (3-14)$$

Además recordando que la función objetivo especificada en la (3-2) corresponde a la minimización del residuo entre los valores del cambio en el campo medido y los del campo calculado con un modelo. Idealmente $\|\overrightarrow{\Delta E_m} - \overrightarrow{\Delta E}(X^*)\|^2 = 0$ sin embargo debido a que existe incertidumbre en la medición y el modelado, se debe definir una tolerancia a la norma del residuo ε_R de tal manera que se puede definir un criterio como:

$$\|\overrightarrow{\Delta E_m} - \overrightarrow{\Delta E}(X^*)\|^2 \leq \varepsilon_R \quad (3-15)$$

Como se mencionó anteriormente, otro criterio que se va a tener en cuenta es evaluar la convergencia de los métodos de optimización, en general se define que un método converge cuando después de determinada cantidad k de iteraciones los valores de los parámetros $X_{(k)}$ no presentan variaciones significativas. Sin embargo dado que ninguno de los métodos de optimización implementados descritos en la sección 3.2 garantizan convergencia, es necesario evaluar el comportamiento de los $X_{(k)}$ encontrados y determinar un criterio de parada fijando un valor máximo al número de iteraciones k_{max} de tal manera que se detenga el algoritmo de optimización a pesar de que éstos no converjan. Dado que los valores de $X_{(k)}$ tienden a acercarse al parámetro, una

manera heurística de determinar la variación es comparando el residuo entre el valor encontrado en la iteración k respecto a la siguiente tal como se indica en la ecuación (3-16), teniendo en cuenta que ε_k es una incertidumbre.

$$k \leq k_{max}; \quad \|X_{(k+1)} - X_{(k)}\| \leq \varepsilon_k \quad (3-16)$$

No hay una manera de definir los valores exactos de los parámetros $K_{max}, \varepsilon_v, \varepsilon_R$ ya que son definidos en muchos de los casos de manera heurística por el diseñador de problema, pero se podría realizar un análisis estadístico del comportamiento de los métodos de optimización implementados con el fin de encontrar los valores de estos parámetros.

3.2 Métodos de Solución del Problema de Optimización

Una vez definido el problema de optimización, es decir se conoce su función objetivo, los parámetros o variables objetivo y las restricciones asociadas al problema, es necesario observar el comportamiento de la función objetivo, su complejidad matemática y restricciones para de esta manera seleccionar la herramienta adecuada para encontrar los valores de los parámetros que hacen que el valor de la función objetivo sea mínima en un problema de minimización.

Teniendo en cuenta lo anterior y la función objetivo descrita en la ecuación (3-2) donde se el residuo entre m observaciones en diferentes puntos de $\overrightarrow{\Delta E m}$ y los valores de $\overrightarrow{\Delta E}(X)$ calculados con un modelo de parámetros $X = [X_1 \cdots X_n]$. Además, de las restricciones igualdad debidas a los modelos electrostáticos de $\Delta E_i(x_i, y_i, X)$ eléctrico asociados a cada punto de observación ubicado en las coordenadas (x_i, y_i) con $i = 1 \dots m$ los cuales pueden ser vistos en la Tabla 3-3. También, teniendo en cuenta las restricciones desigualdad descritas en (3-7) y (3-8). El problema de optimización asociado a encontrar los parámetros de los cambios en los centros de carga asociados a las tormentas eléctricas se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \min_{X_1, X_2, \dots, X_n} F(X) &= \|\overrightarrow{\Delta E m} - \overrightarrow{\Delta E}(X)\|^2 \\ \text{Sueto a:} & \\ \overrightarrow{\Delta E}(X) &= [\Delta E_1(x_1, y_1, X) \cdots \Delta E_m(x_m, y_m, X)]^T \\ x_{min} &\leq x \leq x_{max} \\ y_{min} &\leq y \leq y_{max} \\ z_{min} &\leq z \leq z_{max} \end{aligned} \quad (3-17)$$

Dado que tanto la función objetivo, como la restricción igualdad debida al modelo utilizado de $\Delta E_i(x_i, y_i, z_i, X)$ son funciones no-lineales respecto a los parámetros X (Ver Tabla 3-3), entonces el problema descrito en la ecuación **(3-17)** es un problema de programación no-lineal.

Por simplicidad de la solución, las restricciones de tipo desigualdad tenidas en cuenta en el problema descrito anteriormente serán omitidas con el fin de simplificar los métodos de solución, además de éstas ser una aproximación a la región de observación tal como se indicó en la sección 3.1.2. Además, note que la restricción igualdad puede ser incluida en la función objetivo haciendo que el problema a resolver quede descrito como:

$$\min_{x_1, x_2, \dots, x_n} \left\| \begin{bmatrix} \Delta E m_1 \\ \Delta E m_2 \\ \vdots \\ \Delta E m_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta E_1(x_1, y_1, X) \\ \Delta E_2(x_2, y_2, X) \\ \vdots \\ \Delta E_m(x_m, y_m, X) \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (3-18)$$

El cual hace que el problema descrito en la ecuación **(3-18)** sea un problema de programación no lineal sin restricciones. Con el fin de seleccionar los métodos de optimización apropiados, se debe evaluar la convexidad de la función objetivo descrita en la ecuación anterior, para ello si se observan los modelos de carga eléctrica puntual planteados en la Tabla 3-3 se observa que de manera general los modelos de carga puntual pueden ser expresados a partir del modelo de múltiples cargas Nq expresado en **(3-19)**, por ejemplo si $Nq=1$ el modelo obtenido es el modelo Q y si $Nq=2$ y $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$ se obtiene el modelo bipolar. Es decir el análisis de la convexidad se tendrá en cuenta el análisis de la función de $\Delta E_i(x_i, y_i, X)$.

$$\Delta E_i(x_i, y_i, X) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{k=1}^{Nq} \left(\frac{\Delta Q_k(z_k - H_p)}{\left((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - H_p)^2 \right)^{3/2}} \right) \quad (3-19)$$

Observe que la función expresada en (3-18) corresponde a $\sum_{i=1}^n (\Delta E m_i - \Delta E(x_i, y_i, X))^2$ por lo tanto, para analizar que ésta función sea convexa, es necesario definir la convexidad de la función $\Delta E(x_i, y_i, X)$, note que de la ecuación (3-19) la función $\Delta E(x_i, y_i, X)$ corresponde a la suma ponderada de funciones cuyos pesos están dados por los valores de ΔQ_k por lo tanto $\Delta E_i(x_i, y_i, X)$ puede ser convexa siempre y cuando la función dada por la ecuación (3-20) sea convexa

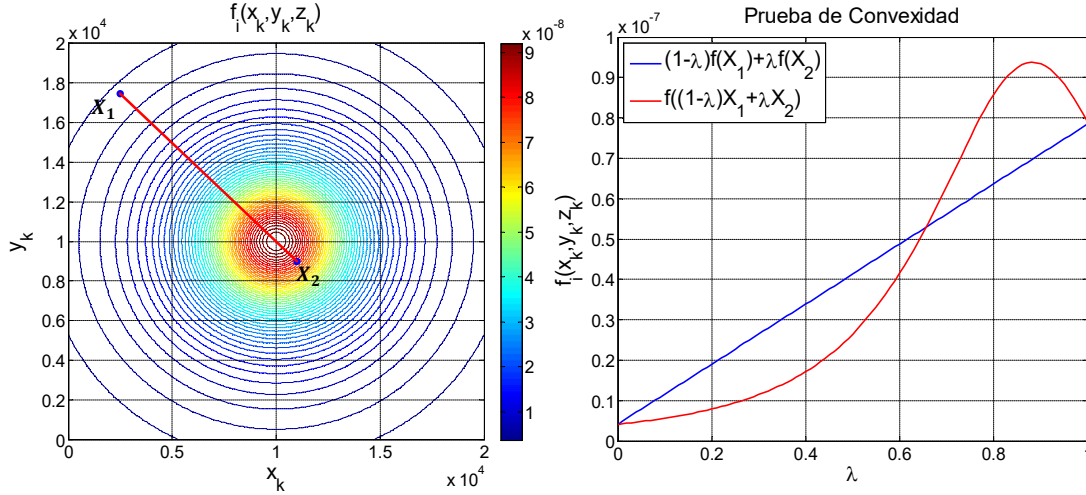
$$f_i(x_k, y_k, z_k) = \frac{(z_k - H_p)}{\left((x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - H_p)^2\right)^{3/2}} \quad (3-20)$$

Para la evaluación de convexidad de $f_i(x_k, y_k, z_k)$ se deben cumplir las siguientes condiciones tomadas de [65]:

- Que el dominio $dom(f_i(x_k, y_k, z_k))$ sea un conjunto convexo: para este caso se evalúan los puntos singulares de la función $f_i(x_k, y_k, z_k)$, para este caso ocurre cuando el denominador de la función es cero, es decir cuando $(x_i, y_i) = (x_k, y_k)$ y $z_k = H_p$ es decir la coordenada de uno de los centros de carga (x_k, y_k, z_k) es igual a la coordenada de un punto de observación de coordenadas (x_i, y_i) sobre un plano xy a una altura $z = H_p$. Bajo la condición anterior note que la función $f_i(x_i, y_i, H_p) = 0/0$ es indeterminada. Por lo que el conjunto del dominio de f_i no es convexo.
- Evaluación de la condición de convexidad definida en la ecuación (4-15) la cual implica que el segmento de línea entre dos puntos cualquiera de la función $f(X_1)$ y $f(X_2)$ es siempre mayor que la curva definida por los valores de la función a lo largo del segmento de línea para todo $X_1, X_2 \in dom(f_i(x_k, y_k, z_k))$ con $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$f((1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2) \leq (1 - \lambda)f(X_1) + \lambda f(X_2) \quad (3-21)$$

Evaluar la condición descrita en (3-21) para la función $f_i(x_k, y_k, z_k)$ resulta ser un proceso matemático complejo de resolver analíticamente, por esta razón, para la función definida en la ecuación (3-20), se realizó una prueba gráfica, la cual consiste en definir X_1 y X_2 para realizar la prueba de convexidad. Para ello, dado que la función es de tres parámetros, se consideró dejar como valor fijo $z_k = 6000m$ para observar el comportamiento de la función en términos de x_k, y_k , ya que la función definida en (3-20) es proporcional al comportamiento del modelo Q estudiado en la sección 2.3.1 donde se observó que éste modelo tiene un comportamiento aproximadamente proporcional respecto a la altura del centro de carga en z , Se definió un dominio tal que $0 \leq x_k \leq 20km$ y $0 \leq y_k \leq 20km$ para un punto de observación ubicado en las coordenadas $(x_i, y_i) = (10km, 10km)$ en un plano de altura $H_p = 0$. La Figura 3-5 muestra las curvas de nivel correspondientes al comportamiento de $f_i(x_k, y_k, z_k)$ en el dominio y condiciones planteadas anteriormente, donde se puede evidenciar cambios en el gradiente de la función la cual se evidencia en los cambios de densidad de las curvas observados en la figura 3-5.

Figura 3-5: Prueba de Convexidad de $f_i(x_k, y_k, z_k)$ 

A partir de la información gráfica de las curvas de nivel, se seleccionaron dos puntos: X_1 en las coordenadas $x_k = 2,5km, y_k = 17,5km, z_k = 6km$ en la región donde las curvas son menos densas y X_2 en las coordenadas $x_k = 11km, y_k = 9km, z_k = 6km$, es decir en la región donde las curvas son más densas que las del punto X_1 . Con estos valores seleccionados, se evaluó la condición de convexidad expresada en (3-21), donde $(1-\lambda)f(X_1) + \lambda f(X_2)$ corresponde al segmento de línea entre $f(X_1)$ y $f(X_2)$ y $f((1-\lambda)X_1 + \lambda X_2)$ corresponde a la curva de $f_i(x_k, y_k, z_k)$ a lo largo de la línea mencionada. La Figura 3-5 muestra la prueba de la desigualdad para valores de $0 \leq \lambda \leq 1$ donde se observa que para los valores de X_1 y X_2 la desigualdad expresada en (4-15) sólo se cumple para $0 \leq \lambda \leq 0.66$, de lo que se puede concluir que $f_i(x_k, y_k, z_k)$ es no convexa y por lo tanto el problema de optimización expresado en (3-18) no es convexo. Cabe notar que el procedimiento planteado corresponde a una prueba gráfica la cual tiene imprecisiones por lo cual no sirve para garantizar que una función si es convexa.

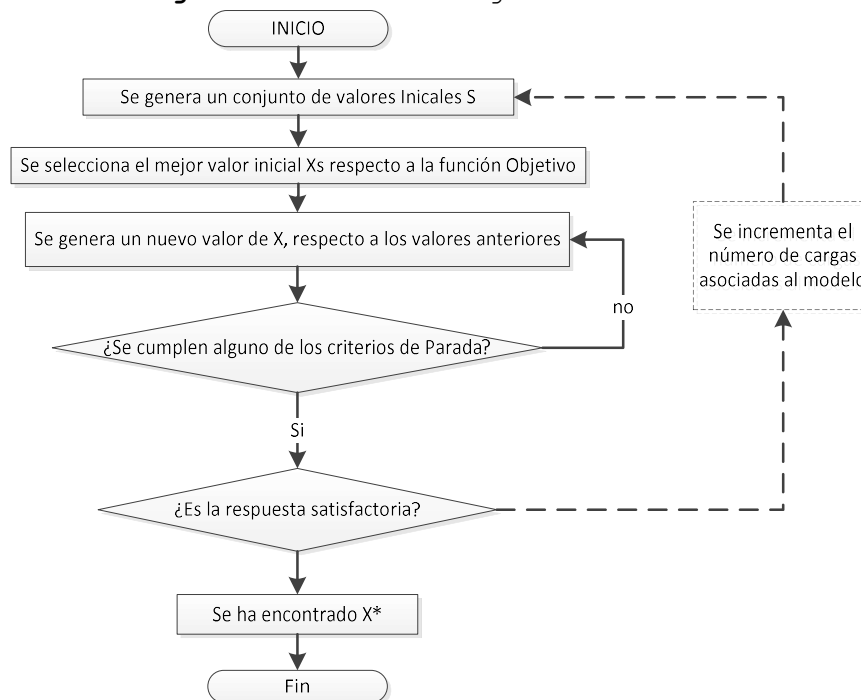
Como se mostró anteriormente, dado que el problema planteado corresponde a un problema de programación no lineal, sin restricciones y no convexo, entonces se deben evaluar estrategias para la solución del problema. Los métodos elegidos dependerán de la información que se tenga del comportamiento de las derivadas de la función objetivo respecto a los parámetros del problema.

Teniendo en cuenta lo anterior, dado que se conocen las funciones exactas de los modelos de carga puntual asociados a los cambios en el campo eléctrico cuando se tienen condiciones de suelo plano, se pueden utilizar métodos que utilicen tanto la información del

gradiente, como la del Hessiano de la función objetivo para la búsqueda de la solución a partir de un valor inicial o semilla del problema, como los métodos de Newton, o cuasi-Newton [65].

Sin embargo, note que, a medida que se incrementa el número de centros de carga en el modelo expresado en (3-19) aumenta la complejidad del modelo y por lo tanto incrementa la complejidad del cálculo de las derivadas parciales de primer y segundo orden asociadas a los gradientes y Hessianos de la función objetivo, haciendo pertinente usar otros métodos que utilicen aproximaciones numéricas de estas derivadas usando diferencias finitas, u otros métodos heurísticos como los algoritmos genéticos para encontrar la solución.

Figura 3-6: Metodología de Solución



La Figura 3-6, muestra un diagrama general de la metodología de solución empleada para la solución del problema de optimización, la cual consiste en encontrar la solución a partir de los valores iniciales de los parámetros o valores de semilla tal como se indicó en la sección 3.1.3, donde a partir de un conjunto de valores iniciales S , se selecciona el mejor valor de los parámetros X_s respecto a la función objetivo, a partir de esta semilla se van calculando tras cada iteración un nuevo valor X o conjunto de parámetros, a los cuales se les evalúa las condiciones de optimalidad y convergencia explicados en la sección 3.1.4. Una

vez se evalúa el criterio de parada del método, se procede a evaluar la satisfacción de la respuesta, la cual consiste en por ejemplo mirar si el número de iteraciones máximo k_{max} fue alcanzado algo que puede dar indicios de que para las condiciones iniciales entregadas, el problema no tuvo convergencia.

Otro de los aspectos que se puede evaluar es el valor de la función objetivo, que para el caso de la metodología planteada por Jacobson y Krider [31], una vez finalizado el algoritmo de optimización, se considera que si la condición de optimalidad propuesta en (3-13) no se satisface, el problema se resuelve nuevamente incrementando el número de centros de carga en el modelo del cambio en el campo eléctrico lo que hace que se incrementen los parámetros o variables objetivo del problema. Cabe notar que ésta metodología está limitada a la cantidad de puntos de observación que se tengan en el área de estudio de las tormentas y por lo tanto a incrementar el número de parámetros n , se reducen los grados de libertad haciendo menor la incertidumbre adecuada para el problema definida en (3-13). Cabe notar que esta metodología es práctica cuando se cuentan con múltiples puntos de observación como es el caso de la red de sensores del KSC en la florida la cual cuenta con 30 molinos de campo activos, esta red fue descrita en la sección 1.4.2 y su información ha sido tomada como referencia para la evaluación de métodos de optimización.

Teniendo en cuenta la información anterior, los métodos pertinentes para la solución del problema son aquellos donde se pueda utilizar la información del gradiente, Jacobiano y Hessiano de las funciones implicadas en el problema debido a la no convexidad del problema tomando como referencia el método de Levenberg-Marquardt el cual es utilizado por Jacobson y Krider [31], adicionalmente se implementará otro método el cual se utiliza solo la información del Jacobiano con el fin de evitar la complejidad computacional del Hessiano. Finalmente se propondrá una solución numérica utilizando un método heurístico basado en el método de algoritmos genéticos.

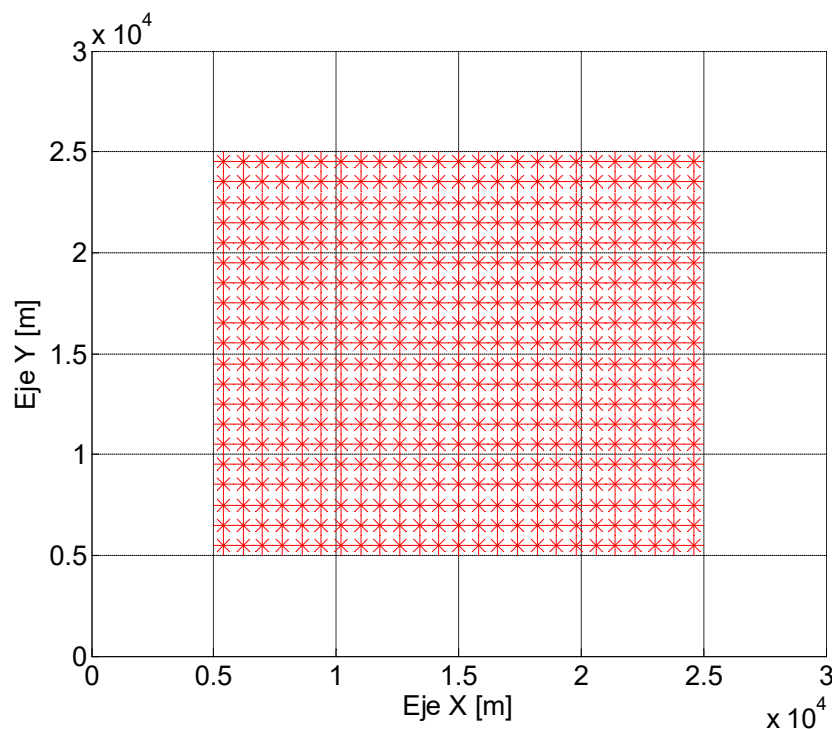
Con el propósito de evaluar el comportamiento de los métodos de optimización implementados, se realizó el siguiente experimento, se decidió estudiar el comportamiento del problema de optimización definido en (3-18) tomando como modelo de ΔE , el modelo Q de parámetros $X = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \Delta Q]$ tal como se indica en (3-22)

$$\min_{x_0, y_0, z_0, \Delta Q} \sum_{i=1}^n (\Delta E m_i - \Delta E(x_i, y_i, x_0, y_0, z_0, \Delta Q))^2 \quad (3-22)$$

$$\text{Con: } \Delta E_i = \frac{\Delta Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{(z_0 - H_p)}{((x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2 + (z_0 - H_p)^2)^{3/2}} \right)$$

Dónde en un un plano de dimenciones de $30km \times 30km$, es decir el área de estudio tomada acorde con la sección 1.6.1, se ubicaron 2000 centros de carga en una rejilla de $25 \times 20 \times 4$ cuya variación en x, y se observa en la Figura 3-7, de tal manera que se varió tanto la posición como la altura de éstos centros de carga y se encuentran para x y y entre 5km y 25km.

Figura 3-7: Ubicación de los Centros de Carga

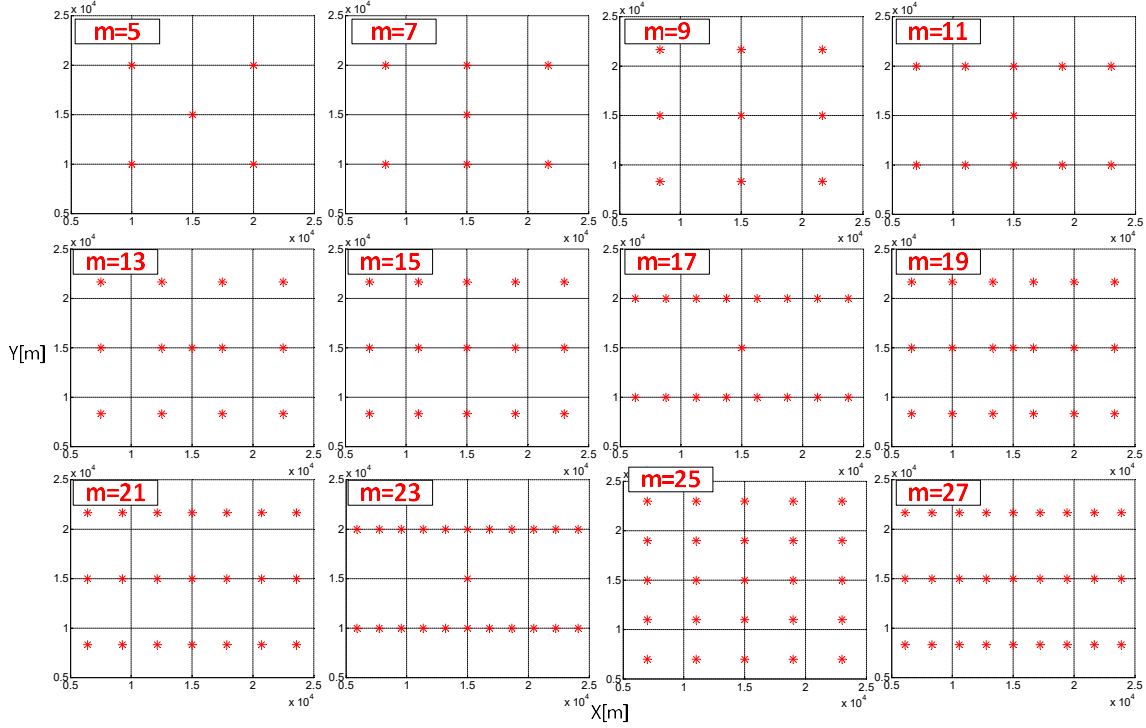


Los 4 valores tomados para la altura de cada punto en x, y fueron de 4000m a 7000m espaciados una distancia de 1000m. Todo esto es con el fin de que en la evaluación de los métodos de optimización se tenga en cuenta la variación de las coordenadas espaciales de los centros de carga. El valor de $\Delta Q = 28C$ y será el mismo para todos los puntos, ya que como se analizó en el capítulo 2, los campos eléctricos son proporcionales a la magnitud de la carga.

Adicional a lo anterior, se varió la cantidad de puntos de observación desde $m = 5$ hasta $m = 29$ incrementando la cantidad de puntos de dos en dos de acuerdo como se muestra en la Figura 3-8 (no se muestra el caso $m = 29$). Es decir se evaluaron 13 casos con

en fin de encontrar la relación existente entre la cantidad de datos y la incertidumbre en los parámetros encontrados.

Figura 3-8: Ubicación de los Puntos de Observación



Dado que el propósito de éste capítulo es evaluar la sensibilidad a la incertidumbre de los métodos de optimización utilizados para la estimación de parámetros de los cambios en los centros de carga asociados a las tormentas. Se evaluará la propagación del error cuando el campo medido contiene incertidumbres.

Para la evaluar lo anterior se pueden utilizar los mismos modelos descritos en el desarrollo del capítulo 2, e intencionalmente agregar una incertidumbre representando los datos medidos como:

$$\Delta E m_i = \Delta E_i(x_i, y_i, z_i, X) + \alpha \Delta E_i(x_i, y_i, z_i, X) N(0,1) \quad (3-23)$$

Dónde:

- $0 \leq \alpha \leq 1$ es un parámetro de proporción a ΔE_i
- $N(0,1)$ es un número pseudoaleatorio generado a partir de una distribución normal de media cero y desviación estándar uno.

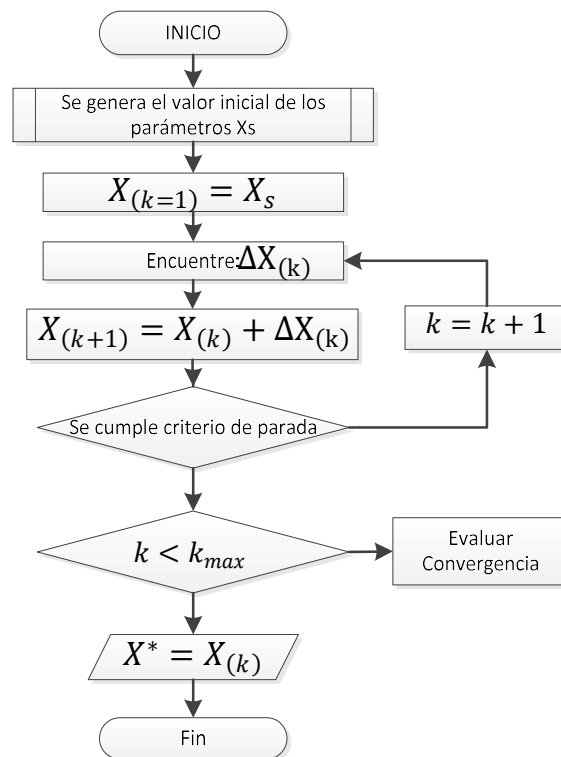
De (3-23) se puede decir que los datos $\Delta E m_i$ medidos emulados con los modelos del cambio en el campo eléctrico ΔE tienen una distribución normal con media $\Delta E_i(x_i, y_i, z_i, X)$ y desviación estándar $\alpha \Delta E_i(x_i, y_i, z_i, X)$ donde α es un factor de proporcionalidad tal que $\alpha \times 100\%$ representa el porcentaje de ΔE_i .

Para los experimentos se tomó $\alpha = 0.1$ lo que implica que los datos medidos tienen una desviación estándar del 10% del valor calculado con los modelos.

3.2.1 Métodos Basados en la Información del Gradiente

Dado que el problema de optimización expresado en (3-18) consiste en un problema de reducción por mínimos cuadrados no lineales, los métodos de solución son basados en la linealización iterativa de la función objetivo con el fin de encontrar la dirección de búsqueda de los valores estimados de los parámetros X . En cada iteración del algoritmo un nuevo y con suerte mejor valor de los parámetros X del problema es generado a partir de unos valores iniciales o semilla de los parámetros $X_{(k=1)} = X_s$ hasta que uno de los criterios de parada sea obtenido.

Figura 3-9: Método de Reducción Mínimos Cuadrados No Lineales



La Figura 3-9 Muestra un diagrama general del método de reducción de mínimos cuadrados el cual consiste en encontrar el mínimo de la función $F(X)$ a partir de un valor inicial X_s , como se indicará a continuación, la diferencia entre los métodos implementados consiste en el cálculo del ajuste de búsqueda en cada iteración $\Delta X(k)$ dónde se espera que la dirección de búsqueda sea la del

gradiente descendente. Cabe destacar que ninguno de los métodos implementados garantiza convergencia, así que es necesario evaluar los criterios de parada indicados en la sección 3.1.4.

Método de Levenberg Marquardt MQ

En cuanto a métodos de solución del problema de encontrar los parámetros de la descarga eléctrica atmosférica el método de Levenberg - Marquardt fue inicialmente propuesto por Jacobson and Krider [31] y otras investigaciones posteriores [7], [24], [33]. Como algoritmo de optimización para la solución del problema de encontrar los parámetros que asocian los cambios en el campo eléctrico con los cambios de los centros de carga en las tormentas eléctricas. Por ésta razón, éste método fue implementado como referencia para la solución del problema.

$$X_{(k+1)} = X_{(k)} - \left(\lambda_k I + H(X_{(k)}) \right)^{-1} \nabla f(X_{(k)}) \quad (3-24)$$

Este método consiste en una linealización como la del método de Newton, donde un factor λ_k es sumado a la diagonal de la matriz del Hessiano [65] $H(X_{(k)}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ con el propósito de mejorar la singularidad de la matriz $H(X_{(k)})$ y darle robustez al método de solución, mejorando la convergencia del mismo.

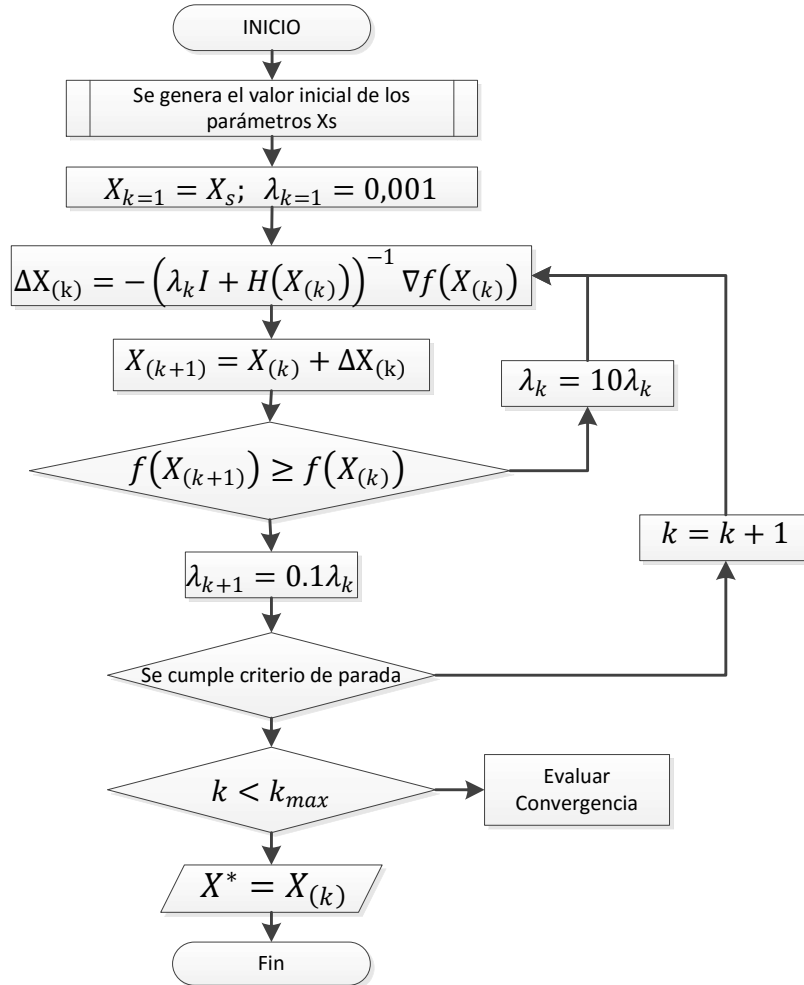
El valor de λ_k es elegido de acuerdo al método propuesto en [31], para éste método, el valor inicial $\lambda_{k=1} = 0.001$. Éste cambia en cada iteración de acuerdo con la siguiente condición:

- Si $f(X_{(k+1)}) > f(X_{(k)})$ entonces $\lambda_k = 10\lambda_k$. Significa que el valor encontrado no sigue una dirección descendente ya que la función objetivo de los parámetros encontrados es mayor a la de los parámetros de la iteración, al incrementar λ_k incrementa el condicionamiento de la matriz H haciendo que la dirección de búsqueda tienda a ser la del negativo del gradiente hasta que se encuentre una dirección de búsqueda que entregue un valor mejor de los parámetros.
- Si $f(X_{(k+1)}) \leq f(X_{(k)})$ entonces $\lambda_{k+1} = 0.1\lambda_k$. Significa que el valor de los parámetros encontrado a mejorado o se encuentra cerca de la convergencia, para éste caso se disminuye 10 veces el valor de λ esto hace que dirección de búsqueda quede ligada H , es decir hace que el paso de búsqueda sea más fino.

Note que si $\|H(X_{(k)})\| \ll \lambda$ la dirección de búsqueda es la del negativo del gradiente $\nabla f(X_{(k)}) \in \mathbb{R}^m$. En general se puede decir que éste es un método más robusto respecto al metodo de Gauss-Newton, sin embargo se requiere la evaluación del Hessiano de la función

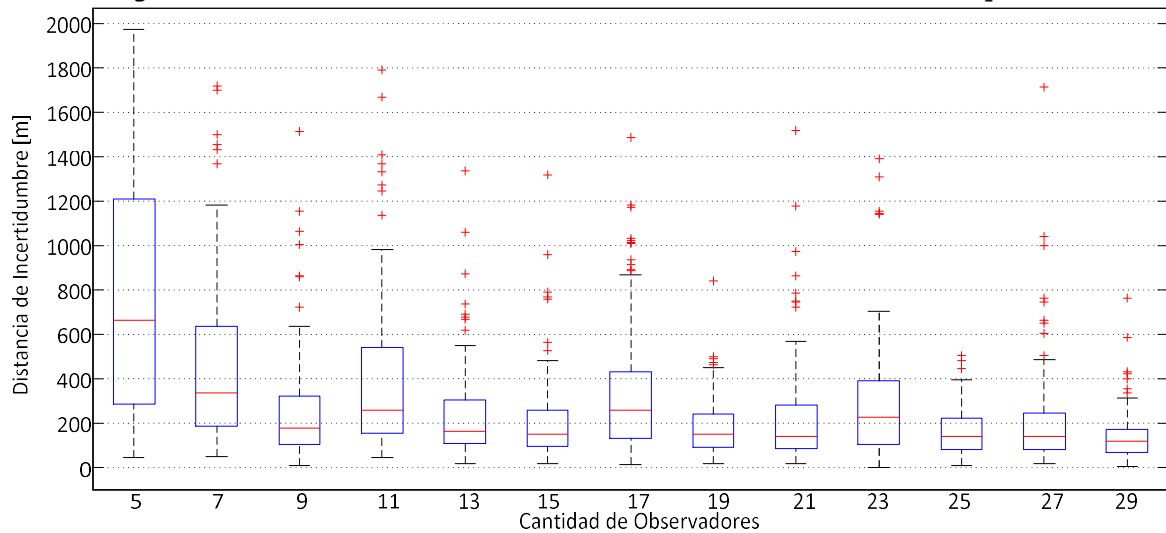
objetivo, algo que puede tener un costo computacional alto cuando se incrementa la complejidad matemática del modelo o el número n de parámetros del mismo.

Figura 3-10: Método de Marquardt

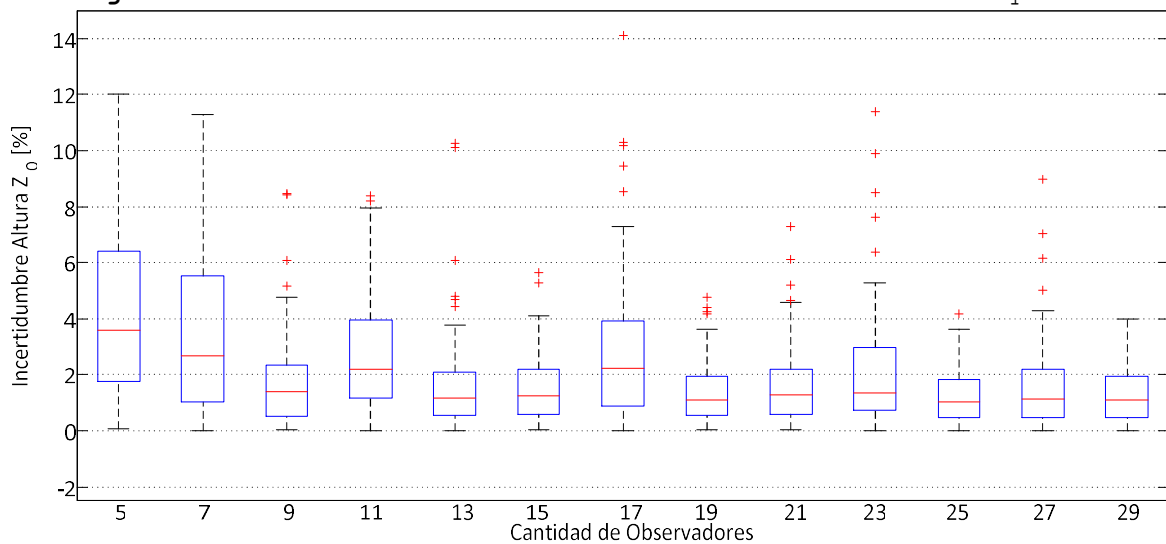


Para evaluar el comportamiento de éste método, se realizaron 13 experimentos variando la cantidad de puntos de observación desde 5 hasta 29 variando de dos en dos tal como se observa en la Figura 3-8. Para cada experimento, se realizó la localización de cada uno de los 2000 centros de carga propuestos e la descripción de la Figura 3-7 en la sección 3.2. Dónde los datos se les asume una incertidumbre del 10% tal como se indicó en la sección mencionada.

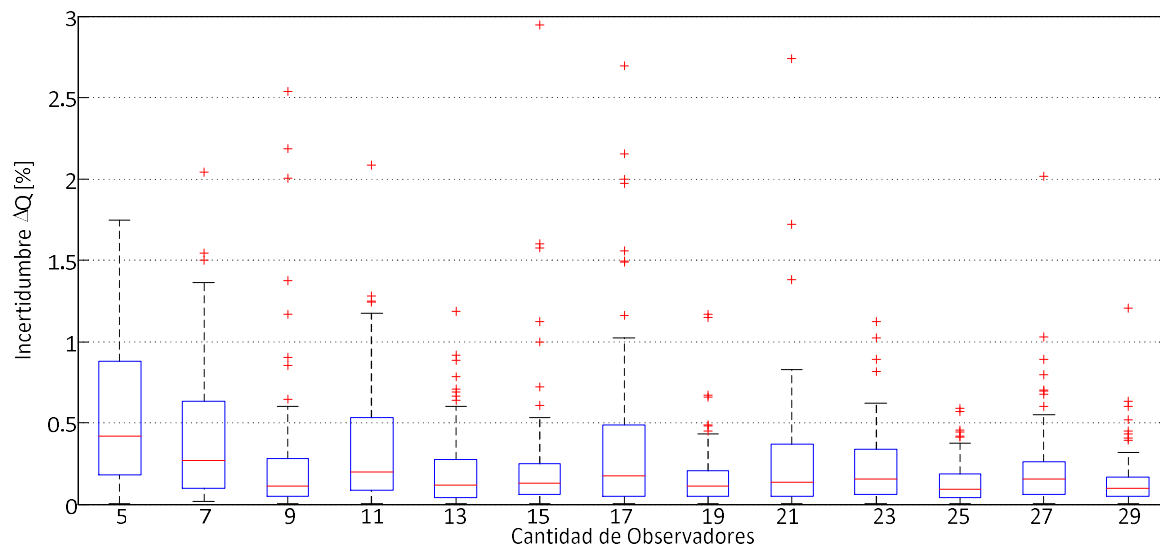
Lo anterior es con el propósito de encontrar el comportamiento de la propagación del error en el método de optimización evaluando las incertidumbres de los parámetros encontrados para cada centro de carga en cada experimento.

Figura 3-11: Incertidumbre Localización Método Marquardt

La Figura 3-11 muestra el comportamiento de la incertidumbre en la localización, la cual está representada por la distancia en las coordenadas x,y entre los parámetros estimados y los reales, donde se observa graficamente el comportamiento de la distribución de la incertidumbre en la localización para cada experimento.

Figura 3-12: Incertidumbre en la Altura Método de Marquardt

Note que a pesar de incrementar la cantidad de puntos de observación se incrementan los grados de libertad para la estimación de variables, se nota que en algunos casos como en $m = 11, 17, 23, 27$ la ubicación de los puntos de observación como se puede observar en la Figura 3-8 no es muy dispersa, haciendo que los puntos de medida tengan valores del campo similares perdiendo grados de libertad.

Figura 3-13: Incertidumbre en ΔQ método de Marquardt

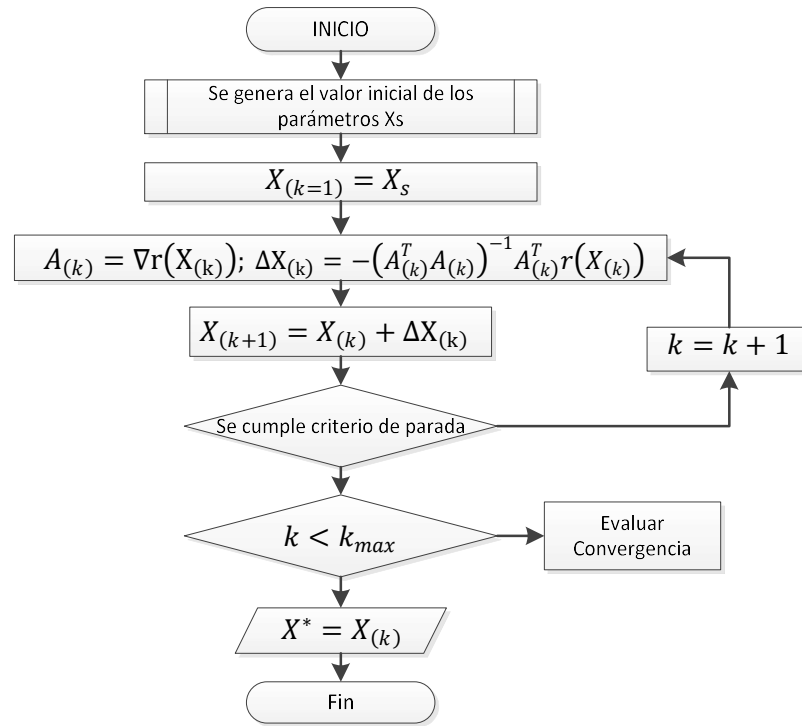
En la Figura 3-12 se muestra el comportamiento del error relativo de la altura z_0 y en la Figura 3-13 el error respecto a ΔQ , note que éstos parámetros se ven poco afectados dado que el error de ellos para el peor de los casos con la menor cantidad de puntos de observación llega a un poco más del 10%, como se indicará mas adelante, el cambio en el centro de carga ΔQ es el parámetro menos sensible a la incertidumbre en el campo medido.

Método de Gauss Newton G-N

Este es un método de reducción de mínimos cuadrados no lineales, donde la linealización se realiza a la función del residuo $r(X) = \overline{\Delta E m} - \overline{\Delta E}(X)$. Donde los valores estimados de X son encontrados de manera iterativa tal como se muestra en la ecuación (3-27), donde $A_k = \nabla r(X_{(k)}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ corresponde al jacobiano de la función del residuo $r(X_{(k)})$ evaluada en los parámetros de la k -ésima iteración [65].

$$X_{(k+1)} = X_{(k)} - (A_{(k)}^T A_{(k)})^{-1} A_{(k)}^T r(X_{(k)}) \quad (3-25)$$

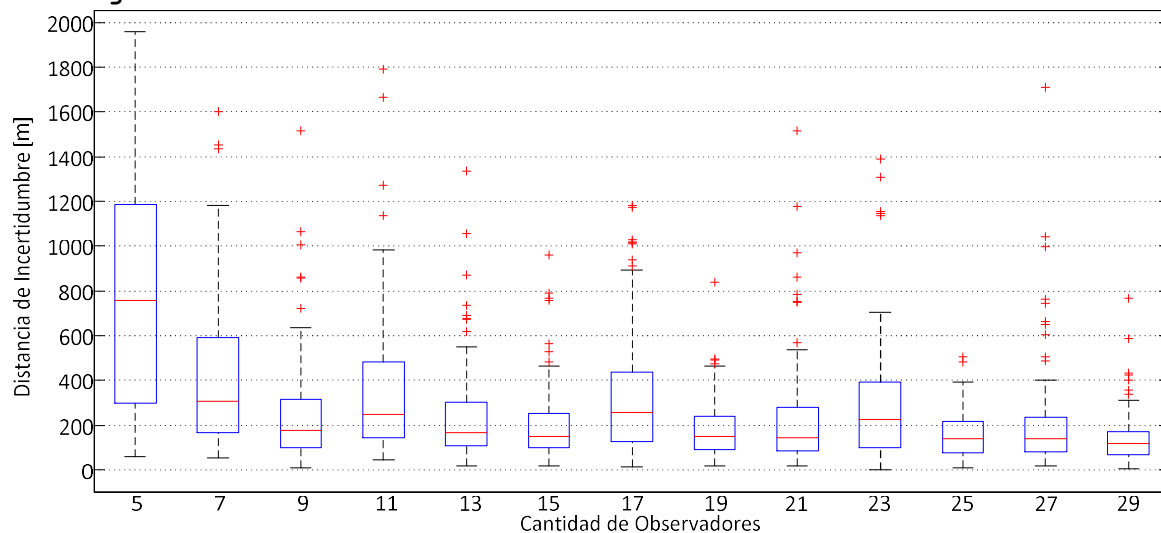
Acorde con lo anterior, éste método no requiere la evaluación del Hessiano de la función objetivo, esto es una ventaja ya que el tiempo de computación es reducido comparado con el método de Marquardt, lo que lo convierte una opción de solución cuando la complejidad de las funciones hacen que sea difícil encontrar la matriz del Hessiano o no sea imposible contar con $H(X_{(k)})$.

Figura 3-14: Método de Gauss-Newton

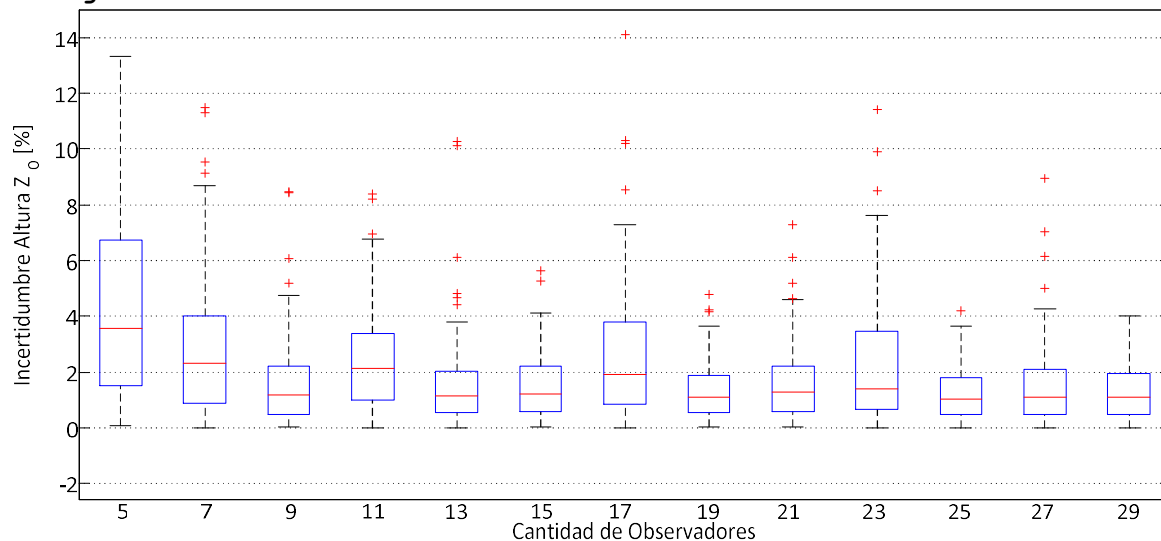
La Figura 3-14 muestra un esquema general del algoritmo implementado para el método de Gauss - Newton, donde a partir de un valor inicial de los parámetros $X = X_s$ el algoritmo busca la solución con la dirección de búsqueda determinada por $\Delta X_{(k)} = (\nabla r(X_{(k)}))^{\dagger} r(X_{(k)})$ donde $(\nabla r(X_{(k)}))^{\dagger}$ corresponde a la pseudo inversa de la matriz del Jacobiano del residuo evaluado en $X_{(k)}$, Este proceso es iterativo y termina cuando se cumpla alguno de los criterios de parada descritos en la sección 3.1.4.

Para la evaluación del comportamiento y la sensibilidad de éste algoritmo frente a perturbaciones en el campo medido, se realizaron los mismos 13 experimentos descritos para la evaluación del método de Marquardt.

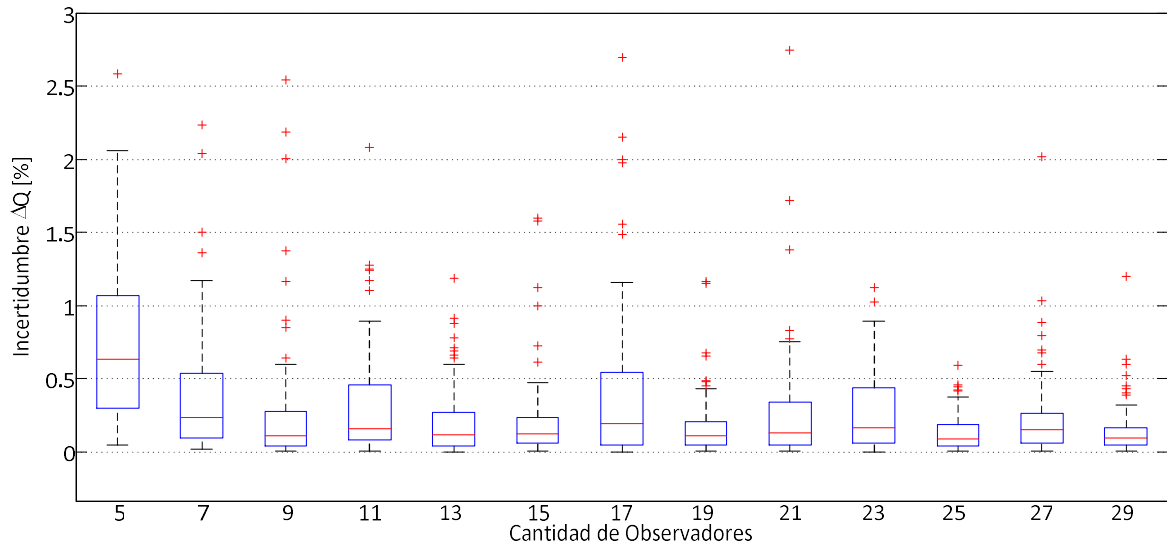
La Figura 3-15 muestra el comportamiento de la incertidumbre de localización como la distancia en x, y entre los parámetros originales de la descarga y los parámetros estimados. De modo general, éstos datos tienen un comportamiento similar a los resultados obtenidos por el método de Marquardt los cuales se pueden observar en la Figura 3-11.

Figura 3-15: Incertidumbre Localización Método Gauss-Newton

De igual manera a pesar de que contar con mayor grados de libertad hacen que la incertidumbre disminuya, cuando se tienen puntos de observación relativamente entre si como los casos con $m = 11, 13, 17, 23$ hacen que no se tenga variabilidad en los campos observados “perdiendo” grados de libertad. Este comportamiento también se ve reflejado en la Figura 3-16 y Figura 3-17 para la altura y ΔQ respectivamente.

Figura 3-16: Incertidumbre en la Altura Método de Gauss-Newton

En cuanto a la incertidumbre en la altura z_0 de los centros de carga de la Figura 3-16 y la del cambio en el centro de carga ΔQ en la Figura 3-17 se observa un comportamiento similar al obtenido en el método de Marquardt, dónde el parámetro ΔQ es el menos afectado.

Figura 3-17: Incertidumbre en ΔQ Método de Gauss-Newton

A pesar de que los resultados sean similares a los obtenidos por el método de Marquardt, el método de Gauss-Newton no tiene la misma robustez, dado que la dirección de búsqueda no tiene información sobre la concavidad de la función objetivo, esto hace que para éste método la selección de la semilla X_s sea un aspecto importante dado que una elección deficiente de la semilla compromete la convergencia del algoritmo y la condicionalidad de la matriz del Jacobiano. Sin embargo, dado que se evita calcular el Hessiano de la función objetivo, el tiempo computacional requerido sea inferior tal como se indicará en la sección 3.2.3.

3.2.2 Métodos sin Gradiente.

En algunas ocasiones, la complejidad de las funciones asociadas tanto a la función objetivo como a las restricciones del problema hacen que no se tenga de manera analítica la información del comportamiento de los gradientes de las funciones, además dado que el problema de encontrar los parámetros X asociados con la localización espacial y los cambios en los centros de carga de las tormentas eléctricas, es más complejo cuando se incrementa el número de parámetros asociados, además la incertidumbre en los datos medidos de los cambios del campo eléctrico ΔE en cada punto de observación es desconocida.

Debido a lo anterior, se han propuesto métodos de optimización alternativos a los métodos de funciones exactas como el método de solución propuesto por Aranguren (2006) [9], el cual consiste de un algoritmo genético el cual cada individuo es representado por

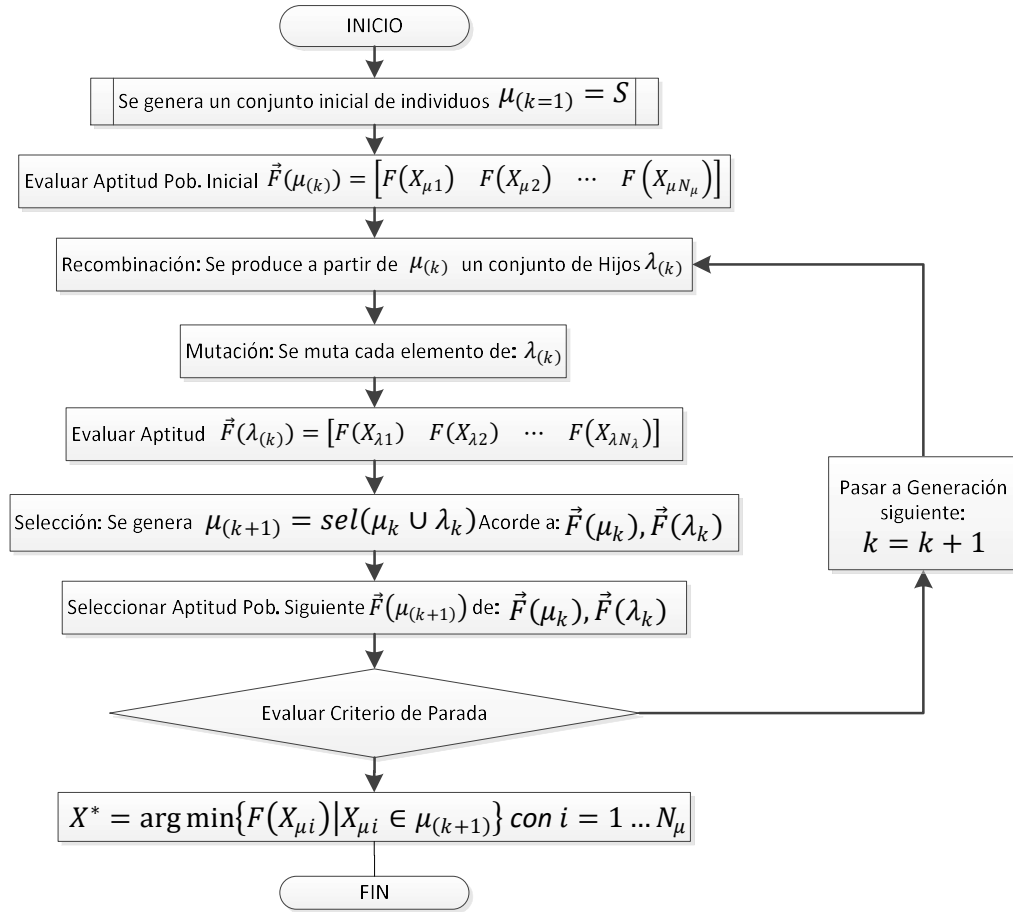
una serie de datos llamados cromosomas (parámetros del problema) y el proceso de encontrar la solución es un método análogo a la evolución natural basado en el principio de la "supervivencia del más apto".

En este trabajo, se proponen el método de estrategias de evolución es un método de optimización sin gradiente, donde la solución es encontrada mediante la evaluación de la función objetivo, la cual es llamada función de aptitud. El funcionamiento de éste método es similar a los algoritmos genéticos [9] con la diferencia que la codificación binaria de los parámetros del problema no es requerida, por lo cual éste método también es conocido como algoritmo genético de valor real, esto evita los errores de cuantificación asociados a la codificación binaria de las variables del problema, permitiendo la evaluación directa de los parámetros de la función objetivo sin necesidad de decodificarlos.

El método implementado es conocido como el método $EE(\mu + \lambda)$, El cual es un algoritmo evolutivo que tiene las siguientes características:

- Cada individuo $X_{\mu,\lambda}$ es un vector de características genéticas conocidas como "Cromosomas" las cuales corresponden a los parámetros X del problema de optimización, para este caso corresponde a los parámetros definidos en la Tabla 3-2
- Cada generación k es equivalente a cada iteración del algoritmo de optimización
- $\mu(k) = \{X_{\mu 1}, X_{\mu 2}, \dots, X_{\mu N_\mu}\}$ Es el conjunto de N_μ individuos perteneciente a la población de cada generación.
- $\lambda(k) = \{X_{\lambda 1}, X_{\lambda 2}, \dots, X_{\lambda N_\lambda}\}$ Es el conjunto de individuos conocidos los "Hijos" de cada generación.
- La evaluación de la función de aptitud corresponde a evaluar la función objetivo para cada individuo tanto de los conjuntos $\lambda(k), \mu(k)$

La Figura 3-18 muestra de manera estructural la manera como fue implementado el algoritmo de optimización, la cual es análoga al comportamiento de los algoritmos evolutivos, donde se inicia con una población inicial es decir un conjunto $\mu(k=1)$ de N_μ individuos generados aleatoriamente como el conjunto S definido en la sección 3.1.3, de tal manera que se cubra el área de búsqueda, teniendo en cuenta las distribuciones de probabilidad de las variables del problema y las restricciones y límites del área de estudio definidos en la sección 3.1.2. Luego a se evalúa la aptitud de cada individuo la cual consiste en evaluar la función objetivo con los parámetros de cada individuo de $\mu(k=1)$, obteniendo $\vec{F}(\mu(k))$

Figura 3-18: Algoritmo Estrategia de Evolución

Luego de esto se empieza el proceso de evolución, el cual consiste en un proceso iterativo dónde en cada iteración se tiene el propósito de generar una nueva población o conjunto $\mu_{(k+1)}$ a partir de los individuos de $\mu_{(k)}$, para ello:

- Se genera un conjunto $\lambda_{(k)}$ con N_λ individuos generados a partir de la recombinación de elementos del $\mu_{(k)}$, para ello se toman aleatoriamente parejas de elementos del conjunto $\mu_{(k)}$ y se genera un elemento de $\lambda_{(k)}$ como la media entre los parámetros de los individuos tomados de $\mu_{(k)}$.
- Una vez generado $\lambda_{(k)}$, cada elemento del conjunto es mutado agregando una fracción aleatoria de la desviación estándar de los parámetros de los elementos del conjunto.
- Se procede a evaluar la aptitud de los elementos de $\lambda_{(k)}$ evaluando la función objetivo del problema con los parámetros de cada elemento de $\lambda_{(k)}$ obteniendo $\vec{F}(\lambda_{(k)})$.
- Luego de esto se seleccionan "los mejores" individuos de ambos conjuntos los cuales corresponderán a la población de

la siguiente generación $\mu_{(k+1)} = \text{sel}(\mu_{(k)} \cup \lambda_{(k)})$ de la siguiente manera:

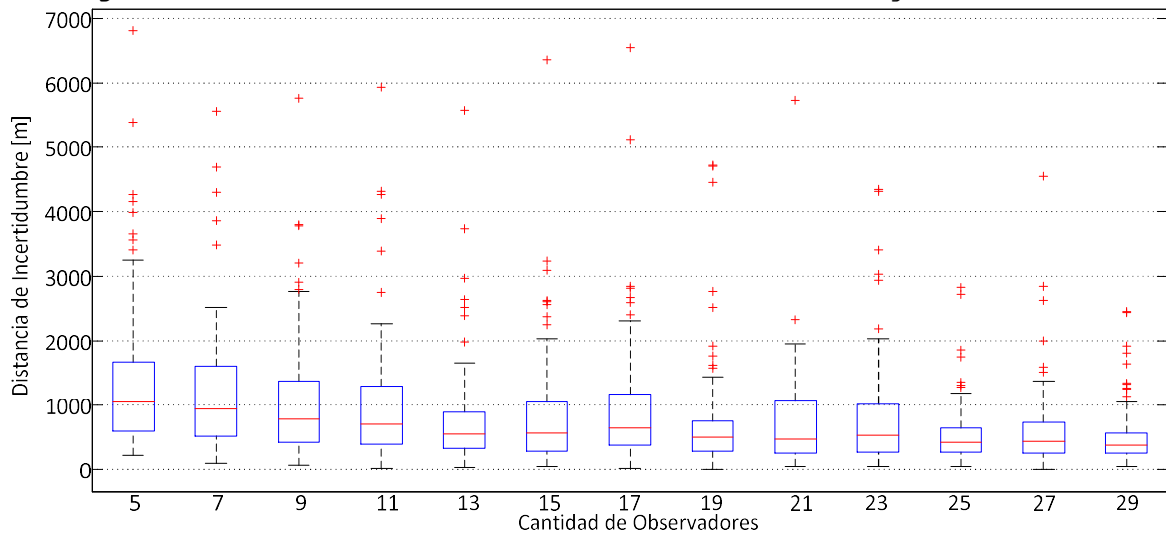
- o Se ordenan los elementos del conjunto $\mu_{(k)} \cup \lambda_{(k)}$ de acuerdo a los valores de $\vec{F}(\lambda_{(k)})$ y $\vec{F}(\mu_{(k)})$, dado que la función es de minimización se ordenan de mayor a menor.
- o Se toman los N_μ mejores elementos y se asignan al conjunto $\mu_{(k+1)}$, además a partir de $\vec{F}(\lambda_{(k)})$ y $\vec{F}(\mu_{(k)})$ se toman los valores de $\vec{F}(\mu_{(k+1)})$ es decir la aptitud de la siguiente generación.
- Dado que para éste método no se cuenta con la información del gradiente se evalúan los siguientes criterios de parada acordes con los descritos en 3.1.4 teniendo en cuenta el mejor individuo de $\mu_{(k+1)}$:
 - o La cantidad de iteraciones o de generaciones máxima k_{max} .
 - o Los cambios del mejor individuo de la generación siguiente $\mu_{(k+1)}$ respecto al mejor de la generación anterior.
 - o El valor de la función objetivo en el mejor valor de $\mu_{(k+1)}$.

Si se cumple alguno de los criterios anteriores se considerará como solución el mejor valor de $\mu_{(k+1)}$, es decir:

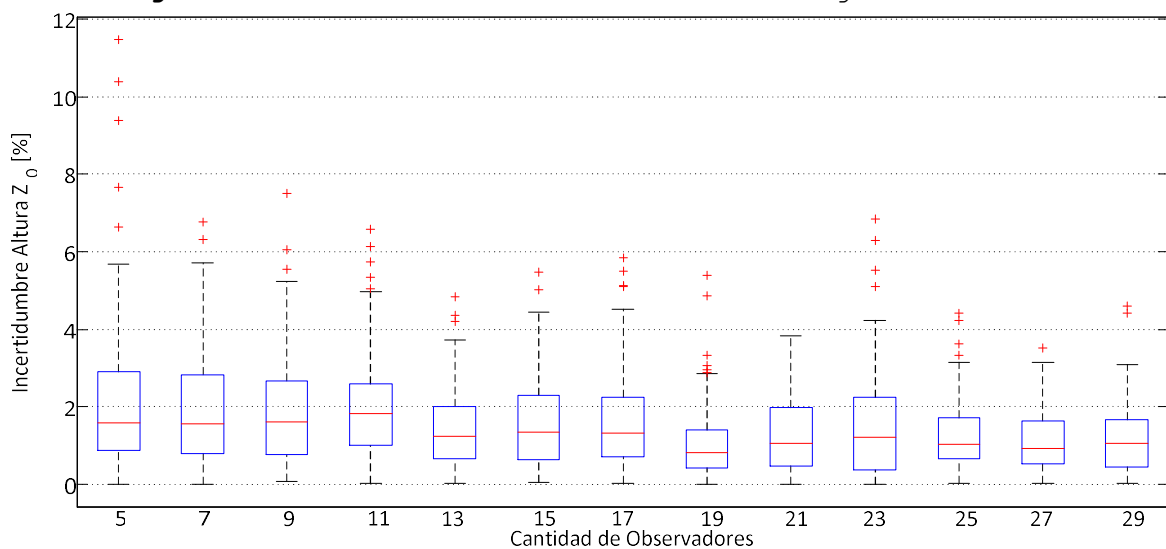
$$X^* = \arg \min \{F(X_{\mu i}) | X_{\mu i} \in \mu_{(k+1)}\} \text{ con } i = 1, \dots, N_\mu$$

Con el fin de evaluar el comportamiento de éste método frente a la incertidumbre en el campo medido, se realizaron los mismos experimentos planteados para el método de Marquardt en la sección 3.2.1, donde estimaron los parámetros para 2000 centros de carga variando la cantidad de sensores desde cinco hasta 29 para 13 casos distintos.

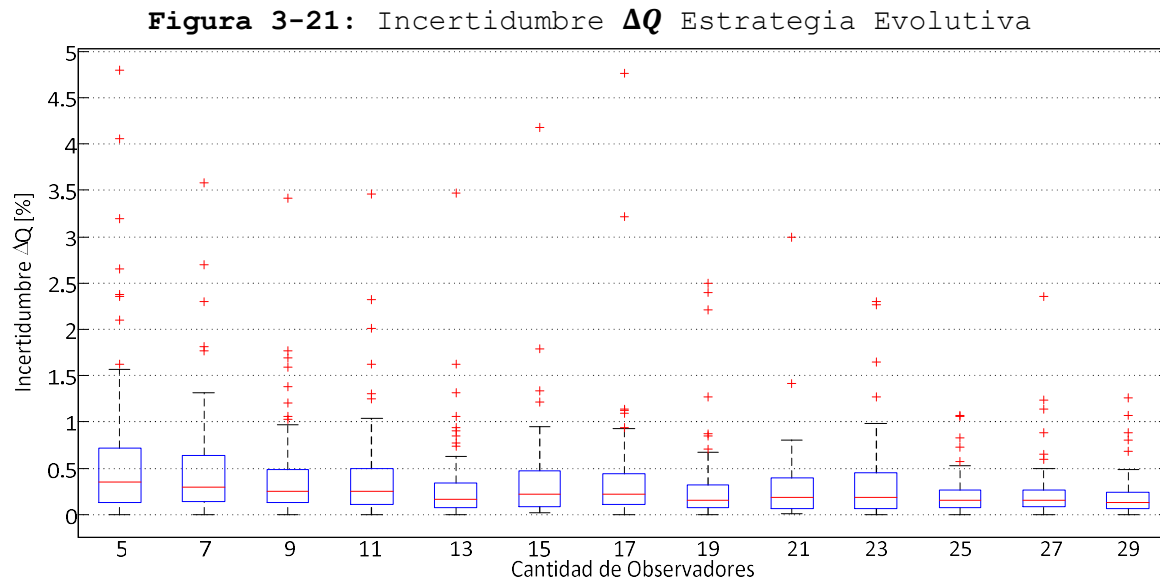
Para la implementación de éste algoritmo se tomaron poblaciones con $N_\mu = 500$ individuos cuyos cromosomas están dados por los parámetros del modelo de campo utilizado para la representación. Para el caso del experimento los parámetros son $X = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \Delta Q]$ y una cantidad máxima de iteraciones o generaciones dada por $k_{max} = 200$. Esto implica que el número máximo de evaluaciones de la función objetivo es de $N_\mu k_{max}$ a menos de que se cumpla el criterio de parada basado en la tolerancia de la función objetivo.

Figura 3-19: Incertidumbre Localización Estrategia Evolutiva

De manera similar a como se evaluó el comportamiento para los métodos basados en el gradiente expuestos en la sección 3.2.1, la Figura 3-19 muestra el comportamiento de la incertidumbre en la localización medido como la distancia en x,y entre los parámetros encontrados y los parámetros originales del centro de carga.

Figura 3-20: Incertidumbre Altura Estrategia Evolutiva

De manera similar a los resultados de los métodos anteriores, se observa una tendencia a la reducción de la incertidumbre con el incremento de la cantidad de puntos de observación, sin embargo la dispersion de los datos es mas grande respecto al método de Marquardt haciendo que la incertidumbre en la localización sea mayor para éste método.

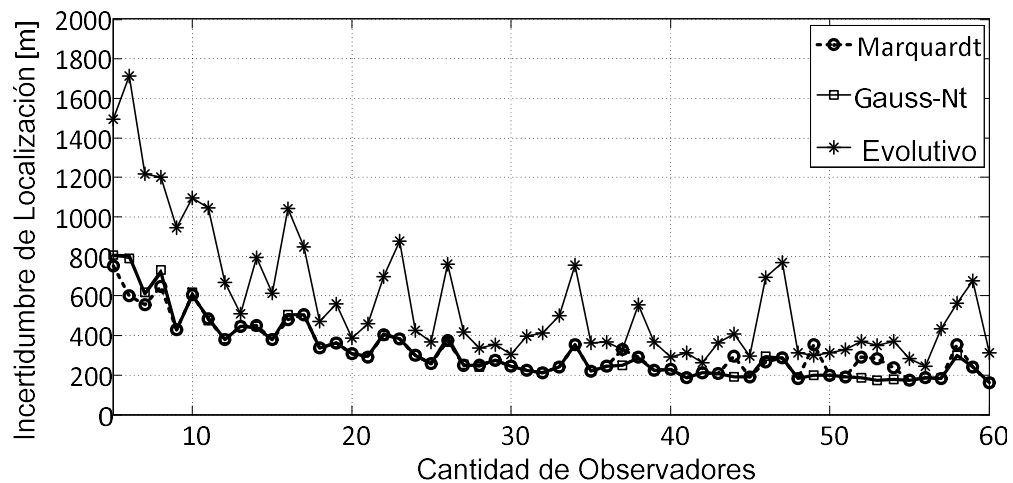


En cuanto a la incertidumbre frente a la altura z_0 del centro de carga que se puede observar en la Figura 3-20 y ΔQ en la Figura 3-21, de manera general se puede observar que éstos parámetros son menos afectados ya que los errores relativos de éstas variables frente a la referencia para cada uno de los experimentos son relativamente bajos alrededor de 10% para la altura.

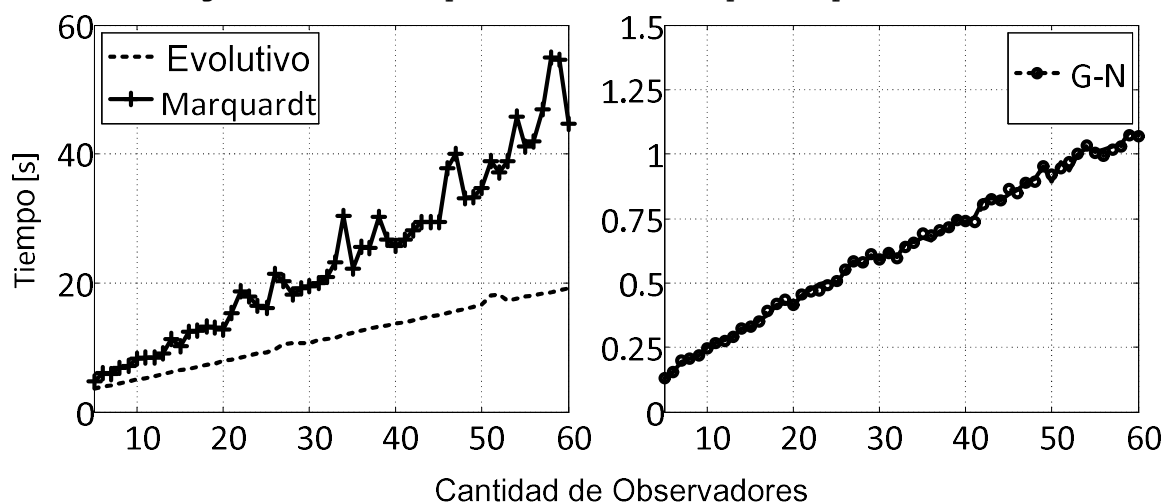
Una de las desventajas de éste método es que no siguen un patrón exacto del comportamiento de las variables, es decir que en caso de repetir los experimentos los resultados pueden variar. A pesar que la incertidumbre en la localización sea mayor respecto a los otros métodos y que sea un método computacionalmente costoso, se puede tomar como una alternativa adicional a la solución del problema de encontrar los parámetros de la descarga y mas si se llegan a utilizar modelos que lleven a expresiones matemáticas para las cuales no se puedan tener expresiones matemáticas exactas de sus derivadas asociadas a los gradientes, Jacobianos y Hessianos de las funciones objetivo.

3.2.3 Comparación de los métodos de Optimización.

Con el propósito de realizar una comparación del comportamiento entre los métodos de optimización implementados, se realizó un experimento similar donde para cada caso se localizaron 500 centros de carga ubicados de acuerdo a la Figura 3-7 a una altura fija de 4000m variando la cantidad de puntos de observación desde 5 hasta 60.

Figura 3-22: Comportamiento de la Incertidumbre Localización

La Figura 3-22 muestra el comportamiento del valor promedio de la distancia en x,y entre el los datos estimados respecto a los de referencia, para los métodos de Marquardt, Gauss-Newton y el método evolutivo, de manera general se puede observar un comportamiento que hace que la incertidumbre disminuya con el incremento de la cantidad de puntos de observación tal como se apreció en los resultados obtenidos en las secciones 3.2.1 y 3.2.2, dónde además se puede apreciar que aumentar la cantidad de puntos de observación no garantiza que se llegue a un valor de cero incertidumbre si no que se tenga un comportamiento asintótico alrededor de los 200m.

Figura 3-23: Comportamiento Tiempo Computacional

Con el propósito de evaluar el rendimiento de los métodos implementados, se graficó el comportamiento del tiempo promedio empleado por cada uno de los algoritmos para cada uno de los casos

donde se varía la cantidad de puntos de observación lo cual se ve detalladamente en la Figura 3-23, donde se tomó el tiempo de cómputo promedio en un equipo de características especificadas en la sección 1.6.2.

De manera general se puede observar un comportamiento incremental en el tiempo de computación requerido por todos los métodos ya que se incrementa el orden de las matrices, los gradientes, Jacobianos y Hessianos requeridos para los cálculos, Note que a pesar que el método de Marquardt termina siendo computacionalmente más costoso, es el más robusto ya que presenta menor incertidumbre al error y es menos sensible a la ubicación de la semilla.

En cambio, para el método propuesto como solución para el método de Gauss Newton, es un método considerablemente más rápido que los demás ya que requiere de menor cantidad de evaluaciones numéricas respecto al método de Marquardt y el Evolutivo. Teniendo un comportamiento frente al error similar al método de Marquardt.

Tabla 3-4: Comportamiento de los Metodos de Optimización

Parámetro		Marquardt	G-N	Evolution
Incertidumbre Localización [m].	μ	826.23	745.07	1913.5
	σ	722.45	534.68	1556.4
Incertidumbre ΔQ [%]	μ	9.51	9.17	18.73
	σ	8.01	9.02	17.24
Incertidumbre z_0 [%]	μ	23.39	20.4	8.12
	σ	24.08	18.26	9.28
K	μ	11	7	100
	σ	3	1	2
ε_R	μ	0.971×10^4	1.002×10^4	8.763×10^4
	σ	2.1×10^4	2.061×10^4	8.656×10^4
	μ	4.5262	0.1471	4.0166
	σ	1.6524	0.0217	0.0559

La Tabla 3-4 muestra un resumen del comportamiento de los métodos respecto a las incertidumbres de los parámetros para $m = 5$ puntos de observación, donde se puede determinar que a pesar que el método de Gauss-Newton es el mejor respecto a velocidad de convergencia, el método de Marquardt es el más robusto.

3.3 Incertidumbre en la localización y Propagación del Error

Para el análisis de errores se necesita encontrar el error de localización respecto a errores en la medición en cada i sensor:

$$\widehat{\Delta E m_i} = \Delta E m_i + \delta \Delta E m_i \quad (3-26)$$

Dónde:

- $\widehat{\Delta E m_i}$ es la medida con error
- $\Delta E m_i$ es la medida sin error
- $\delta \Delta E m_i$ es la incertidumbre en la medida

Teniendo en cuenta que:

$$r(x) = \begin{bmatrix} \Delta E_1(x_0, y_0, z_0, \Delta Q)|_{x_1, y_1} \\ \Delta E_2(x_0, y_0, z_0, \Delta Q)|_{x_2, y_2} \\ \vdots \\ \Delta E_m(x_0, y_0, z_0, \Delta Q)|_{x_n, y_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta E m_1 \\ \Delta E m_2 \\ \vdots \\ \Delta E m_m \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

El error se propagará al residuo

$$\widehat{r(x)} = r(x) + \delta r(x) \quad (3-28)$$

De lo anterior se debe notar que, para el método de Gauss Newton:

$$X_{(k+1)} = X_{(k)} - (A_{(k)}^T A_{(k)})^{-1} A_{(k)}^T r(X_{(k)}) \quad (3-29)$$

Con base a lo anterior se puede determinar que el error de localización estará determinado por el error propagado por la pseudo inversa de la matriz del Jacobiano

Por definición, se puede obtener que la matriz del Jacobiano $A = \nabla r(X)$ está dada por:

$$A = \nabla r(X_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_0} & \frac{\partial r_1}{\partial y_0} & \frac{\partial r_1}{\partial z_0} & \frac{\partial r_1}{\partial \Delta Q} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_0} & \frac{\partial r_2}{\partial y_0} & \frac{\partial r_2}{\partial z_0} & \frac{\partial r_2}{\partial \Delta Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial x_0} & \frac{\partial r_m}{\partial y_0} & \frac{\partial r_m}{\partial z_0} & \frac{\partial r_m}{\partial \Delta Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta E_1}{\partial x_0} & \frac{\partial \Delta E_1}{\partial y_0} & \frac{\partial \Delta E_1}{\partial z_0} & \frac{\partial \Delta E_1}{\partial \Delta Q} \\ \frac{\partial \Delta E_2}{\partial x_0} & \frac{\partial \Delta E_2}{\partial y_0} & \frac{\partial \Delta E_2}{\partial z_0} & \frac{\partial \Delta E_2}{\partial \Delta Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta E_m}{\partial x_0} & \frac{\partial \Delta E_m}{\partial y_0} & \frac{\partial \Delta E_m}{\partial z_0} & \frac{\partial \Delta E_m}{\partial \Delta Q} \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

Donde las m filas corresponden a la cantidad de sensores y $n=4$ variables. Las columnas corresponden a la sensibilidad del modelo a cada variable en todos los sensores.

3.3.1 Perturbaciones en la matriz del Jacobiano.

Note que la matriz del Jacobiano es evaluada en cada una de las iteraciones en X_k pero como se explicó anteriormente X_k está perturbada de tal manera que $x_k = \widehat{x_k} + \delta x_k$. De acuerdo con (3-30):

$$A = \hat{A} + \delta A = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial \Delta E_1}{\partial x_0} & \frac{\partial \Delta E_1}{\partial y_0} & \frac{\partial \Delta E_1}{\partial z_0} & \frac{\partial \Delta E_1}{\partial \Delta Q} \\ \frac{\partial \Delta E_2}{\partial x_0} & \frac{\partial \Delta E_2}{\partial y_0} & \frac{\partial \Delta E_2}{\partial z_0} & \frac{\partial \Delta E_2}{\partial \Delta Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta E_m}{\partial x_0} & \frac{\partial \Delta E_m}{\partial y_0} & \frac{\partial \Delta E_m}{\partial z_0} & \frac{\partial \Delta E_m}{\partial \Delta Q} \end{array} \right]_{(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0, z_0 + \delta z_0, \Delta Q + \delta \Delta)_k}$$

Es decir la matriz A también está perturbada. La perturbación de la matriz A , dependerá de que tan sensible sean las derivadas parciales ante cambios en los parámetros, pero teniendo en cuenta que esta sensibilidad va a ser diferentes teniendo en cuenta que los sensores están ubicados a diferentes distancias del evento dado que para el modelo expresado en la sección 2.3.1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta E_i}{\partial x_0} &= -\frac{3}{2\pi\epsilon} \frac{z_0 q (-x_i + x_0)}{((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial \Delta E_i}{\partial y_0} &= -\frac{3}{2\pi\epsilon} \frac{z_0 q (-y_i + x_0)}{((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2)^{5/2}} \\ \frac{\partial \Delta E_i}{\partial z_0} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[\frac{z_0 q}{((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3z_0^2 q}{((x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ \frac{\partial \Delta E_i}{\partial \Delta Q} &= \frac{z_0}{2\pi\epsilon_0 [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2]} \end{aligned}$$

A primera vista se puede observar que la última columna no es sensible a cambios en la magnitud de los cambios en los centros de carga ΔQ . Sin embargo es sensible a perturbaciones en la localización de la carga.

3.3.2 Descomposición en valores singulares

Cabe notar que éste es un problema de estimación de parámetros del tipo:

$$b = Ax + v \quad (3-31)$$

Dónde:

- v es un vector que representa las incertidumbres
- x es el vector a ser estimado
- b es el vector equivalente a la medición

A partir de lo anterior, se plantea utilizar análisis por descomposición de valores singulares SVD para el análisis del comportamiento del error y la estabilidad del método de localización.

Aplicando SVD completo a la matriz del Jacobiano $A \in \mathbf{R}^{m \times 4}$, ésta se puede escribir como:

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T$$

Dónde: Σ es una matriz diagonal con los valores singulares

ordenados:

$$U = [U_n \quad U_{m-n}]$$

Recordando que:

$$b = Ax$$

Entonces el valor estimado estará dado por: $x = Bb$ donde $BA = I$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \Delta Q \end{bmatrix} = V[\Sigma^{-1} \quad 0]U^T b$$

3.3.3 Región de Incertidumbre.

El problema de reducción por mínimos cuadrados es un problema de estimación, donde por cada iteración se busca el mínimo de una función objetivo no lineal linealizando el residuo, para ello el problema consiste en un problema de la forma matricial de la ecuación (3-31)

Considerando la ecuación (3-31) donde v representa las incertidumbres.

De acuerdo con lo anterior: considerando el estimador de (3-31) se tiene \hat{x} estimado

$$\hat{x} + \delta x = Bb + Bv$$

Dónde: $\delta x = Bv$ y $BA = I$ es decir para el caso de los mínimos cuadrados $B = (A^T A)^{-1} A^T$ es la pseudoinversa de A

De lo anterior se deduce que:

$$\delta x = (A^T A)^{-1} A^T v$$

Siendo $B = (A^T A)^{-1} A^T$ la pseudoinversa de A

Entonces x estimado pertenece a un conjunto de incertidumbre determinado por:

$$x \in \varepsilon_{ls} = \{Bv \mid \|v\| < \varepsilon\}$$

El cual es un elipsoide centrado en el valor estimado de \hat{x} y con semiejes determinados por:

$$\alpha \sigma_i u_i$$

Dónde:

- σ_i y u_i son los valores y vectores singulares de B .
- u_i da la dirección del semieje y σ_i la magnitud

Además cada uno de los componentes del vector $\alpha \sigma_i u_i$ determina la incertidumbre respecto a cada una de las variables del vector estimado \hat{x} que para este caso:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \Delta Q \end{bmatrix}$$

Y que la máxima incertidumbre para cada una de las variables está dada por

- Para x_0 $\sum_{i=1}^4 \varepsilon \sigma_i U_{i,1}$

- Para y_0 $\sum_{i=1}^4 \varepsilon \sigma_i U_{i,2}$
- Para z_0 $\sum_{i=1}^4 \varepsilon \sigma_i U_{i,3}$
- Para ΔQ $\sum_{i=1}^4 \varepsilon \sigma_i U_{i,4}$

Es decir la suma de las componentes respecto a cada una de las variables \hat{x} de los vectores $\alpha \sigma_i u_i$, esto se puede lograr dado que los vectores u_i son ortogonales entre sí, lo que permite la suma cartesiana de vectores.

A partir de lo anterior se puede determinar que:

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \|\alpha \sigma_i u_i\|$$

Será el vector que de la máxima dirección de incertidumbre del vector estimado \hat{x}

A continuación se encuentra el comportamiento de los vectores u proponiendo 4 experimentos en los cuales se varía la cantidad de sensores, haciéndolo con 5, 7, 9 y 13 sensores, bajo las condiciones planteadas en la sección 3.2.

Tabla 3-5: Análisis de Incertidumbre

Parámetro	5 sensores	7 Sensores	9 Sensores	15 Sensores
Incertidumbre en x_0	10.6667	10.6667	8.0611	4.8687
Incertidumbre en y_0	2.4921	3.4921	3.1006	2.6788
Incertidumbre en z_0	4.6094	4.6094	2.1391	1.8946
Incertidumbre en ΔQ	0.0016	0.0016	0.0015	0.0012
Número de Condición Matriz A $\kappa(A)$	4.6933e+03	4.4966e+03	3.9546e+03	2.7903e+03

Donde se observa que al aumentar la cantidad de sensores, se disminuye la incertidumbre en la localización, en cuanto a las coordenadas espaciales se observa que el comportamiento es similar al observado en la carga, Adicionalmente observando el comportamiento, la posición respecto al eje x es la variable más sensible al error, por lo que pueden inducir errores más grandes en la localización longitud, latitud.

3.3.4 Condicionamiento de los mínimos cuadrados:

Los problemas con mínimos cuadrados son mucho más sensibles a perturbaciones que los sistemas lineales. Cabe notar que para que un problema de mínimos cuadrados tenga solución, la matriz del problema debe ser de rango completo en sus columnas y por lo tanto una matriz cuyo rango por columnas sea deficiente es difícil de definir un número de condición [66].

A partir de un análisis de sensibilidad se observa que el número de condición está dado por:

$$\kappa(A) = \|A\| \|B\|$$

La Tabla 3-5 muestra el comportamiento del número de condición para cada experimento donde se variaron la cantidad de sensores. De acuerdo con esto, era de esperarse que el número de condición mejore con el incremento de la cantidad de sensores, esto es debido al incremento en la redundancia de los valores censados.

4 Capítulo 4 Metodología para la Localización de tormentas en geometrías de terreno no plano

El problema de localización de tormentas eléctricas en geometrías de terreno no plano, consiste en encontrar los parámetros geométricos y propiedades eléctricas de las descargas eléctricas atmosféricas a partir de mediciones del cambio brusco del campo eléctrico ambiental desde diferentes puntos de observación, que a diferencia de lo tratado en el desarrollo del capítulo 3, se tendrá en cuenta el efecto de la geometría irregular debida a un suelo cuya geografía es principalmente montañosa.

Cabe notar, que la mayoría de los estudios relacionados con el análisis del comportamiento de los centros de carga en las tormentas eléctricas mediante mediciones de campo eléctrico ambiental, de los que se han tenido referencia [7], [9], [14], [19], [24], [31]–[33], [57], han sido realizados bajo condiciones geográficas que permiten aproximar la geometría del suelo a una geometría plana. Esto permite simplificar los modelos que describen el comportamiento del campo eléctrico y que son utilizados para la evaluación de las propiedades de las descargas.

Adicional a lo anterior como se indicó en el Capítulo 3, éstos modelos permiten usar algoritmos de optimización que utilicen las funciones exactas que representan los gradientes y Hessianos de las funciones objetivo respecto a los parámetros que se desean encontrar. Sin embargo no se han reportado estudios que permitan establecer un criterio por el cual se pueda despreciar o no los efectos de la topografía, tanto en la medición, modelado y el análisis de los datos de los campos observados en las tormentas.

Aunque, Reynolds y Neil (1955)[32] Realizan el estudio del campo electrostático con 11 sensores ubicados a una altura de 2133 msnm (7000 pies), realiza el estudio mediante el modelado puntual de los cambios en las cargas eléctricas utilizando una aproximación de suelo plano e infinito, si bien, en éste trabajo no se estudia los efectos que tiene una geometría irregular tanto en el comportamiento del campo eléctrico como del método de

localización, solo se hace referencia que los niveles de campo eléctrico medidos son mayores a los obtenidos a nivel del mar debido a que al estar los puntos de observación a una altura mayor, éstos se encuentran más cerca de los centros de carga en las nubes de tormenta.

Este problema de modelamiento típicamente ha sido trabajado mediante la definición de una ganancia k [7], sin embargo como se indicó en el desarrollo del capítulo 2, ni siquiera con la aproximación de suelo plano permite definir un factor constante que permita de manera exacta definir una proporcionalidad entre el modelo definido a nivel del mar y un plano a una altura diferente dado que en los modelos del campo puntual no existe una relación lineal entre la altura del centro de carga y los cambios del campo eléctrico ΔE .

Adicionalmente, como se mostró en el capítulo mencionado anteriormente, la descripción del comportamiento del campo electrostático cuando se tienen en cuenta las condiciones topográficas del suelo, hacen que el comportamiento observado sea complejo, haciendo que no se pueda definir un factor constante k que haga que el comportamiento del campo eléctrico se aproxime al de condiciones de suelo plano.

Debido a lo anterior, se hace referencia al trabajo realizado por Aranguren (2011) [7] dónde en primer lugar, demuestra que la relación entre el modelo de carga plana y el modelo en terreno no plano no es lineal, para ello define un perfil de suelo de montaña bidimensional y analiza el comportamiento del campo en un punto de dicho perfil variando la distancia horizontal entre el punto de observación y el del centro de carga. Además, se analiza mediante herramientas de simulación, la influencia de una topografía montañosa al campo electrostático, utilizando como caso de estudio una red de sensores ubicados en la comunidad de Navarra, España.

Para evaluar esta influencia, analizó el comportamiento del campo electrostático relativo a los sensores ubicados en zona montañosa, para ello, tomó el perfil de la variación de la superficie del suelo, y mediante simulación de diferencias finitas obtuvo el comportamiento del campo electrostático debido a una carga puntual

En cuanto a otros trabajos relacionados con el problema cabe destacar el realizado por López et al (2012) [9] donde estudia el comportamiento del campo electrostático para una región montañosa como la ciudad de Medellín usando un solo sensor de campo electrostático, correlacionando la información de éste sensor y la del sistema de detección de descargas SID, todo esto con el fin de

reconocer patrones de comportamiento del campo eléctrico ambiental que permita establecer alarmas tempranas.

4.1 Caso de estudio

Como se estudió en el capítulo 3, cuando se asume un error en el valor del campo medido, esto hace que exista un error en los parámetros encontrados de las descargas, por esta razón, dado que en el desarrollo del capítulo 2 se encontraron diferencias entre los valores de los campos calculados comparando los resultados entre el valor del campo considerando los modelos puntuales de carga donde se asume el suelo plano con el campo cuando se considera la geometría del suelo montañoso tomando como caso de estudio el área de estudio en la ciudad de Medellín descrita en la sección 1.6.2.

Se debe tener en cuenta que los equipos necesarios para tomar mediciones del campo eléctrico ambiental, y la detección de sus cambios bruscos ΔE requieren de las siguientes condiciones técnicas para su funcionamiento entre las que cabe destacar:

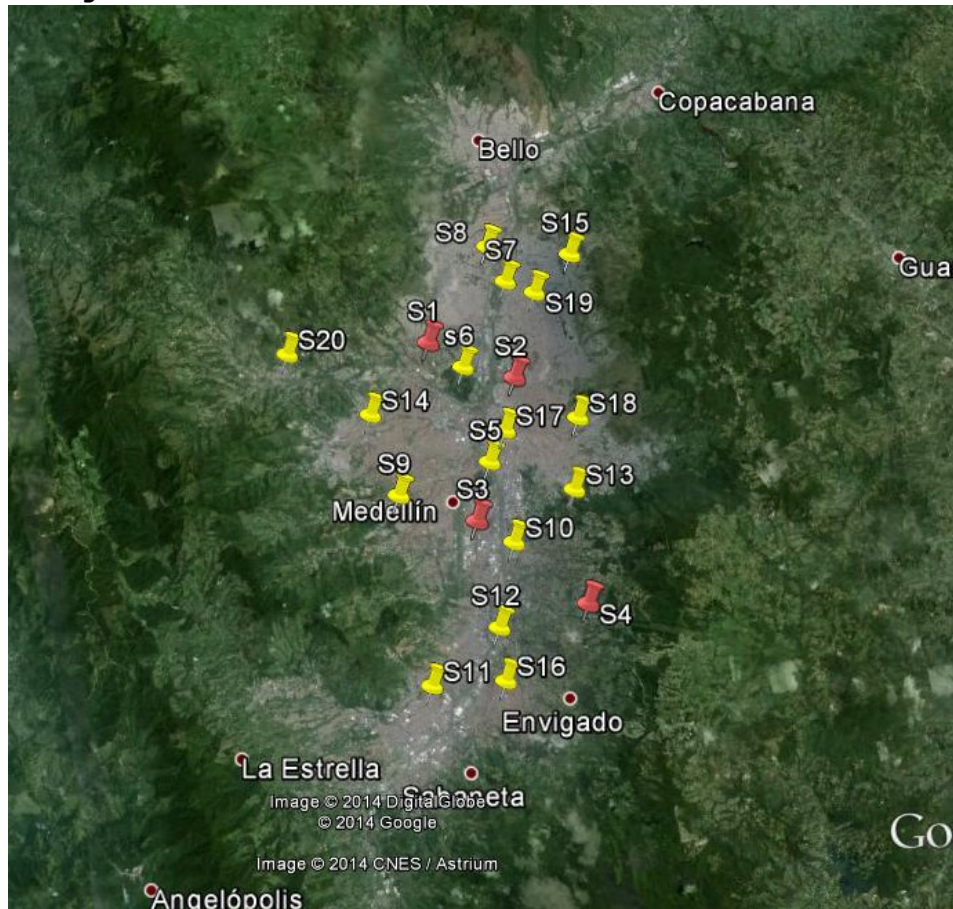
- **Energía Eléctrica:** la cual puede ser tomada de la red eléctrica convencional o incluso llegar a usar fuentes alternativas para su funcionamiento.
- **Comunicaciones:** Se debe tener en cuenta una comunicación por medios confinados o inalámbricos para la transmisión de los datos de cada sensor y poder ser analizados en un servidor.
- **Ubicación Física:** Dependiendo del tipo de instrumento utilizado, se requiere de una locación física que permita tener equipos de interior, así como la capacidad estructural del sitio dónde se coloca el dispositivo de medición.
- **Seguridad:** la instalación de los equipos de cada estación de medida, debe tener condiciones de accesibilidad de tal manera que, se faciliten operaciones de reparación y mantenimiento de los equipos y a su vez los equipos se encuentren protegidos contra robos u acciones vandálicas.

Teniendo en cuenta lo anterior, una de las opciones viables, usadas como criterio para ubicar los puntos de observación tenidos en cuenta en los experimentos realizados en éste capítulo, consiste en ubicar los puntos de observación en el área de estudio teniendo en cuenta los siguientes factores, tomando como referencia imágenes satelitales del área de estudio tomadas a

partir de la aplicación Google® Earth™ como la observada en la **Figura 4-1:**

- Área de Ubicación de los sensores: Dado que se deben cumplir con recursos de energía y de comunicaciones para cada una de las estaciones de medida, se prefirió ubicar los puntos de observación en regiones urbanas o densamente pobladas.
- Se prefirió el uso de instituciones o lugares públicos conocidos como puntos de referencia, en general estos fueron ubicados en:
 - o Estaciones: Metro y servicio de buses articulados.
 - o Instituciones: Universidades, colegios, hospitales y edificios administrativos.

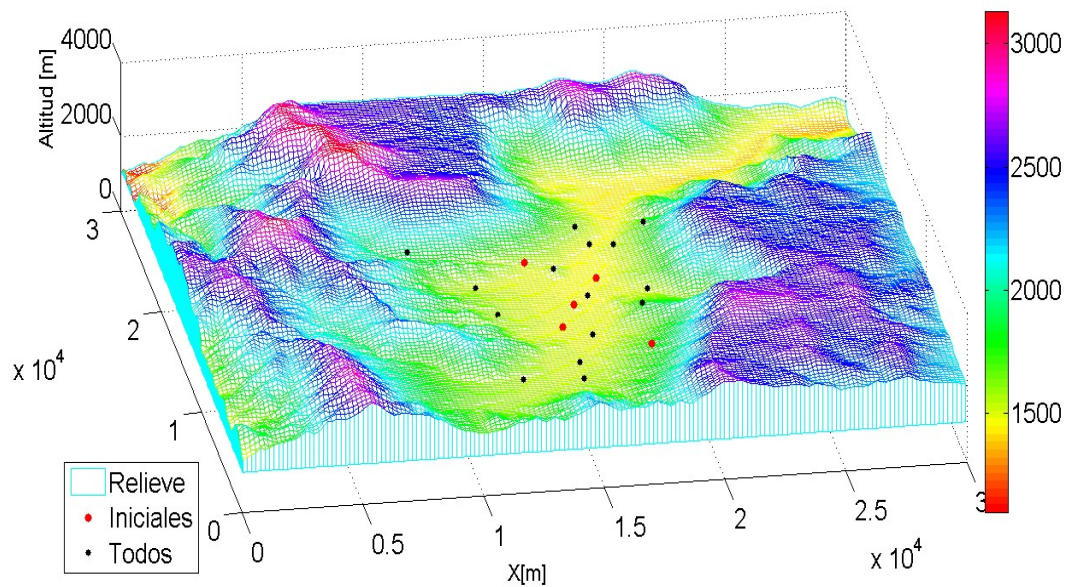
Figura 4-1: Ubicación de los Puntos de Observación



Teniendo en cuenta lo anterior, se ubicaron 20 puntos de observación identificados desde **S1...S20** como se muestra en la Figura 4-1, donde al momento del desarrollo de éste trabajo, el único sensor instalado es el marcado como **S1** el cual se encuentra ubicado en la azotea del bloque M7 de la Facultad de Minas y su

información fue usada como referencia por el trabajo realizado por López (2011) [25]. Cabe notar que el resto de ubicaciones de los sensores son hipotéticas tomando como referencia lugares públicos reconocidos cuyas coordenadas latitud, longitud y altura son detalladas en el Anexo B las cuales fueron convertidas a coordenadas cartesianas tal como se indicó en la sección 2.1.1. A partir de lo anterior, la Figura 4-2 muestra la ubicación de los 20 puntos de observación de la Figura 4-1 sobre el relieve del área utilizada como caso de estudio. Donde los sensores marcados como S1-S5 Corresponden a los puntos de observación tomados como referencia de la cantidad mínima de puntos de observación requeridos para encontrar los parámetros del modelo Q.

Figura 4-2: Puntos de Observación Sobre el Relieve



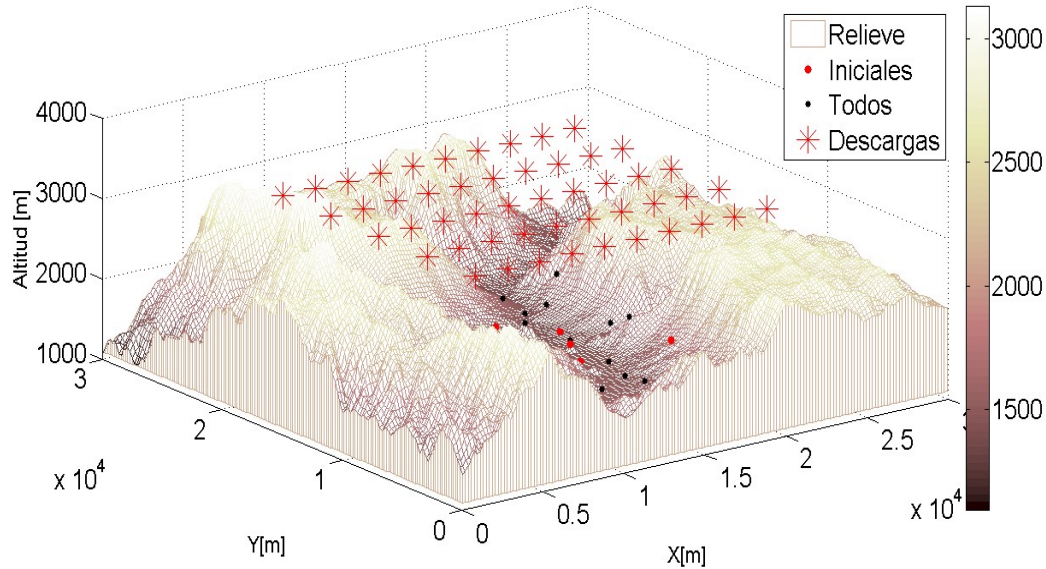
Cabe notar que para los experimentos se variaron el número de puntos de observación, "activando" para cada experimento de manera consecutiva los puntos de observación marcados desde S6 hasta S11 indicados en las ilustraciones anteriores.

Con el propósito de evaluar los métodos de localización usando como referencia una geometría de suelo montañosa, se realizó el siguiente experimento, donde se ubicaron 250 cambios de centros de cargas en igual cantidad de coordenadas diferentes. Para ello se ubicaron las coordenadas de los centros de carga en una rejilla rectangular tridimensional de $10 \times 5 \times 5$ elementos igualmente separados respecto a cada coordenada con las siguientes características:

- Las coordenadas respecto al eje x van desde $x_{min} = 6km$ hasta $x_{max} = 24km$ con una separación de $2km$
- Las coordenadas respecto al eje y van desde $y_{min} = 5km$ hasta $y_{max} = 25km$ con una separación de $5km$

- Las coordenadas respecto al eje z van desde $z_{min} = 3.2km$ hasta $z_{max} = 7.2km$ con una separación de $1km$

Figura 4-3: Ubicación de los Puntos del Experimento.



Teniendo en cuenta lo anterior, la Figura 4-3 muestra la rejilla de los puntos generados sobre el relieve en (x,y) , es decir qué se varió la altura de cada centro de carga para no omitir los efectos de la altura del centro de carga en el análisis del problema.

4.2 Efecto del relieve en la localización y estimación de Parámetros

Con el fin de evaluar los efectos del relieve en la determinación de los parámetros de las tormentas eléctricas atmosféricas, es necesario estudiar el comportamiento de las metodologías de ubicación utilizando información del comportamiento del campo electrostático.

Con el fin de lograr esto, se realizó un estudio sobre el error de localización utilizando como medidas, el campo electrostático sobre un relieve montañoso, tomando como ejemplo el relieve de la ciudad de Medellín tomado de acuerdo a la sección 1.6.2.

Para realizar este estudio se resolvió el problema usando un modelo de carga puntual o modelo Q de parámetros $X = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \Delta Q]$, cuyo problema de optimización fue descrito en la sección 3.2 el cual está se observa en la ecuación (4-1)

$$\min_{x_0, y_0, z_0, \Delta Q} F(X) = \sum_{i=1}^m (\Delta Em_i - \Delta E(x_i, y_i, x_0, y_0, z_0, \Delta Q))^2 \quad (4-1)$$

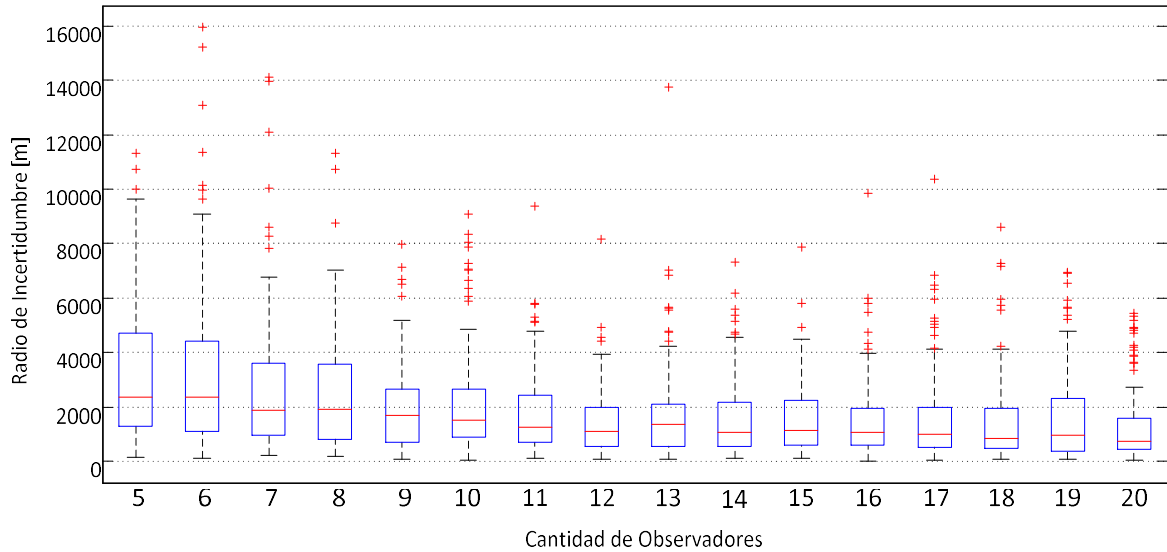
Dónde:

- $\Delta E(x_i, y_i, x_0, y_0, z_0, \Delta Q)$ Corresponde al campo calculado con el modelo de carga puntual para suelo plano descrito en la sección 3.1.2.
- $\Delta Em_i = \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X)$ El campo medido será emulado con el modelo basado en la solución del método de elementos finitos para cada valor de los parámetros X definidos en el mallado de cargas del experimento definido en la sección anterior.

De acuerdo con los resultados obtenidos en el desarrollo del capítulo 3, el método de optimización de Levenberg-Marquard, es un método que tiene mayor robustés a la hora de solucionar el problema definido en (4-1) respecto al método de Gauss-Newton, además su tiempo convergencia es menor respecto al método evolutivo, por esta razón, bajo las condiciones anteriores, con el fin de encontrar la incertidumbre que tienen los parámetros cuando se aproxima el suelo en el modelo a un suelo plano, se resolvió el problema sin agregar incertidumbre al campo medido que es emulado a partir de la solución por método de elementos finitos de ΔEm_i para todos los centros de carga definidos en el experimento.

Se evaluaron 15 casos donde se variaron la cantidad de puntos de observación desde 5 hasta 20, agregando de a un punto de observación con el orden establecido en la Figura 4-1.

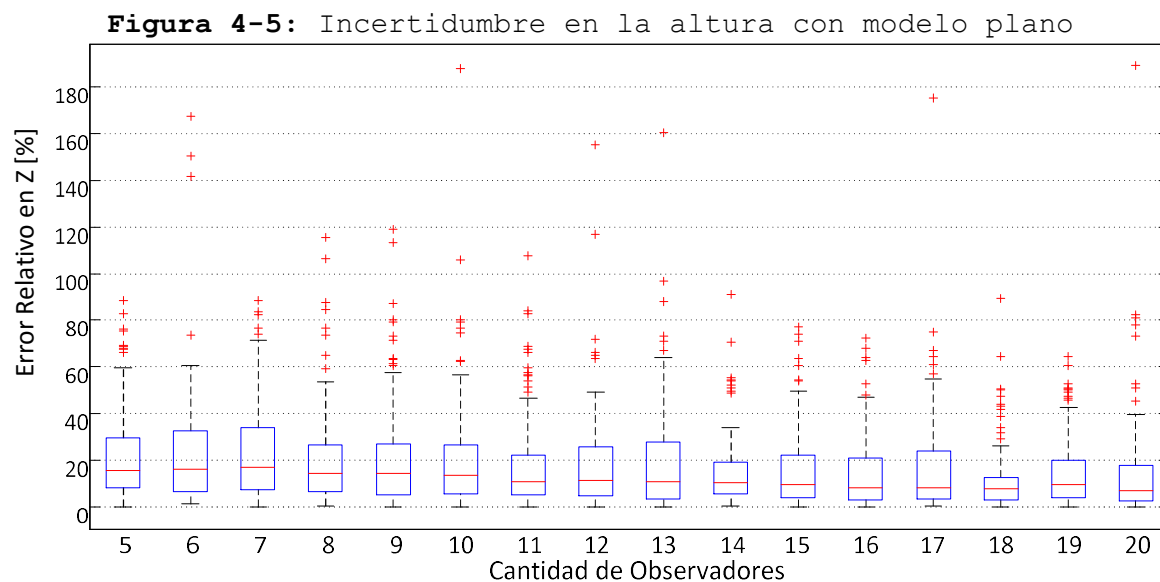
Figura 4-4: Incertidumbre Localización Modelo Plano



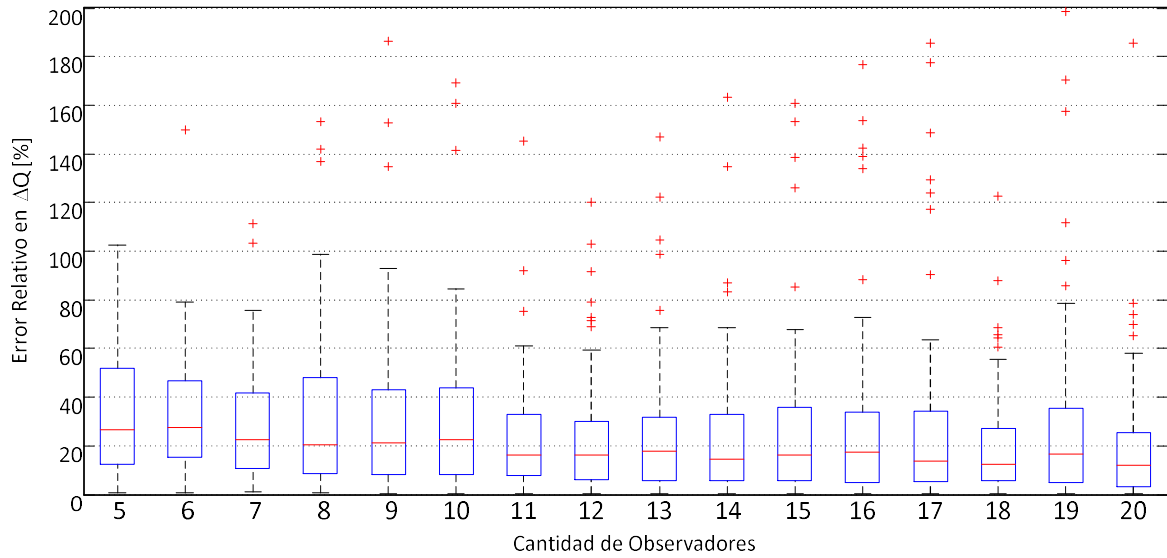
Este análisis se realiza debido a qué como se indicó en el desarrollo del Capítulo 2 existe incertidumbre cuando el modelo

del comportamiento de ΔE debido a cambios en los centros de carga se utiliza una aproximación de suelo plano, además como se observó en el desarrollo del capítulo 3, las variables más afectadas de los parámetros estimados para cada descarga corresponde a la posición geográfica del centro de carga, por lo cual la función objetivo y los métodos de solución también son sensibles a errores en el campo estimado.

En cuanto a los análisis realizados, se observó el comportamiento de las variables estimadas (las coordenadas espaciales x_0, y_0 , la altura z_0 y el cambio ΔQ del centro de carga) donde en general se puede observar que al contar con una mayor cantidad de observadores, esto implica un aumento en la redundancia de la información de la red de localización y por tanto una reducción en la incertidumbre de los parámetros encontrados.



Un comportamiento similar se observa en cuanto a los comportamientos tanto en la altura de los centros de carga z_0 en la Figura 4-5 y el cambio en el centro de carga ΔQ en la Figura 4-6, donde se observa que el error relativo entre éstos parámetros estimados y los de referencia, son mayores a los encontrados en los resultados del Capítulo 3, esto se ve, debido a que como se observó en el desarrollo del Capítulo 2, la altura de los puntos de sobre el relieve es mayor a los puntos sobre el plano, haciendo que las distancias relativas de cada punto sobre la superficie respecto a los centros de carga sea inferior, esto hace que la magnitud de los cambios en el campo eléctrico ΔE sobre un plano sean inferiores a los del relieve, finalmente ya que el método de solución para éste caso usa un modelo plano, compenza la magnitud del campo con la magnitud de ΔQ o reduciendo la altura z_0 .

Figura 4-6: Incertidumbre en ΔQ para modelo plano.

De lo anterior, se puede concluir que, aunque se pueda incrementar considerablemente la cantidad de puntos de observación en una región de estudio, las incertidumbres en los parámetros asociados a la descarga tienen un comportamiento asintótico debido a que persiste el error en el modelado debido a la aproximación plana del suelo. Adicionalmente, como se puede observar en los resultados obtenidos, incrementar la cantidad de puntos de observación no siempre garantiza mejores resultados ya que la incertidumbre de algunos puntos de observación puede ser mayor respecto a los demás incrementando la incertidumbre en los parámetros.

Debido a que la incertidumbre en la posición geográfica de los centros de carga en x,y es considerablemente alta e incluso comparable con la magnitud del área de estudio, entonces se puede concluir que el modelo de carga puntual utilizado para encontrar los parámetros de descargas cuando se tiene un modelo montañoso, no describen de forma suficiente éste comportamiento, sin embargo como se indicará mas adelante su relativo costo computacional hacen que éstas soluciones sirvan para tener una ubicación tentativa de los eventos asociados a las descargas.

4.3 El Problema Localización Usando modelos de Elementos Finitos.

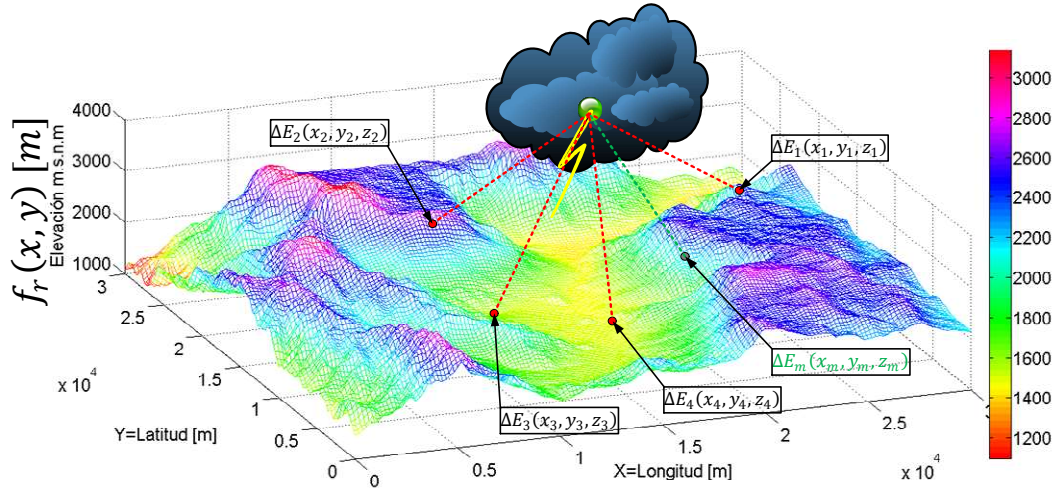
De acuerdo con los resultados anteriores, se nota que el uso de modelos que consideran la geometría del suelo como un suelo plano no son suficientes para describir el comportamiento del campo electrostático ya que como se describió en el desarrollo del Capítulo 2, el error entre el modelo plano y el modelo planteado usando las condiciones de frontera impuestas por la geometría

irregular de la topografía del suelo, hacen que el error tenga un comportamiento no lineal y por lo tanto no sea suficiente realizar un ajuste a los modelos en suelo plano. Adicional a lo anterior, como se demostró en el capítulo 3 los métodos de optimización utilizados para la solución del problema de encontrar los parámetros de los cambios en los centros de carga y sus coordenadas geográficas tienen incertidumbre cuando se asume error en los valores de los cambios del campo eléctrico ΔE observado en varios puntos de observación. Esto se vio reflejado en la sección 4.2 dónde al emular el campo observado en cada punto de medida como el resultado de la solución del modelo con topografía usando método de elementos finitos se presenta incertidumbre en los parámetros encontrados incluso incrementando la cantidad de puntos de observación a pesar de que no se agregó incertidumbre al campo emulado.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propone utilizar el modelo que representa los cambios en el campo eléctrico el cual corresponde a la ecuación diferencial parcial teniendo en cuenta las condiciones de frontera determinadas por la geometría irregular de un suelo montañoso.

En general el problema es análogo al problema planteado en la sección 3.1, el cual consiste en encontrar los parámetros de los cambios de los centros de carga en las tormentas eléctricas a partir de múltiples mediciones de los cambios en el campo eléctrico ΔE en m diferentes puntos de observación, donde a diferencia del problema planteado en el capítulo 3, las coordenadas de los puntos de observación (x_i, y_i, z_i) con $i = 1 \dots m$ no se encuentran sobre un plano tal como se observa en la Figura 4-7 por lo que cada sensor no se encuentran a la misma altura, estos se encuentran sobre una superficie del relieve $f_r(x, y)$ de tal manera que la altura a la que se encuentra cada sensor es tal que $z_i \geq f_r(x_i, y_i)$ es decir los puntos de observación no pueden estar bajo la superficie del relieve.

Figura 4-7: El Problema de Estimación de Parámetros en Suelo Montañoso



De acuerdo con lo anterior, de igual manera al problema tratado en el capítulo 3, el problema corresponde a la identificación de parámetros, donde la principal diferencia radica en el modelo utilizado para describir el campo en cada punto de observación respecto a los parámetros de la representación de la descarga. Con el fin de lograr esto, se propuso un problema de optimización similar al planteado en el capítulo 3, al cual se le deben definir tanto su función objetivo y las restricciones tanto de igualdad como de desigualdad, además de la metodología para seleccionar la semilla y el criterio de parada usado.

4.3.1 La función objetivo

Para éste problema, la función objetivo corresponderá a la misma función planteada en la sección 3.1.1, dónde lo que se espera encontrar son los valores de los n parámetros $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ de un modelo de campo electrostático de tal manera que la diferencia entre los valores calculados respecto a los valores de los cambios del campo eléctrico ΔE_{m_i} medidos en m puntos distintos de observación sea la mínima. Es decir que lo que cambiará en el planteamiento del problema será que la restricción igualdad correspondiente al modelo de $\Delta E_i = \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, \mathbf{X})$ corresponderá al resultado del método de elementos finitos de la solución de la ecuación diferencial de Poisson bajo las condiciones de frontera definidas en el desarrollo de la sección 2.2.3.

Teniendo en cuenta lo anterior, en general el problema se puede ver como un problema de reducción de mínimos cuadrados, donde se

busca reducir el residuo entre los valores del campo medido y calculado tal como se observa en la ecuación (4-2).

$$\min_{X_1, X_2, \dots, X_n} F(X) = \sum_{i=1}^m (\Delta E m_i - \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X))^2 \quad (4-2)$$

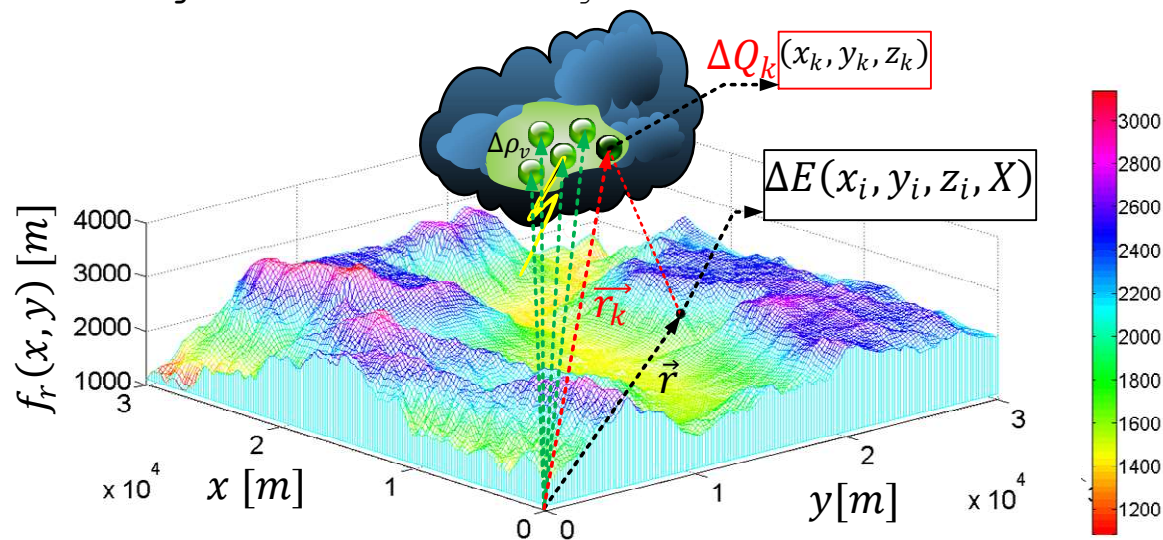
Observe que las variables objetivo X_1, X_2, \dots, X_n son las mismas descritas en la sección 3.1.2, ya que la diferencia entre los métodos de solución cuando se considera el plano conductor y cuando se considera el relieve radica en las condiciones de frontera del suelo y no en los parámetros del modelo, por lo tanto para el problema definido en (4-2) los parámetros de los modelos son iguales tal como se puede observar en la Tabla 4-1.

Cabe anotar que la función objetivo definida por Jacobson y Krider [31], la cual fue descrita en la ecuación (3-4) de la sección 3.1.1 en la cual se busca la reducción del estadístico χ^2 también puede ser aplicado, conociendo la incertidumbre de cada estación de medida.

4.3.2 Restricciones

De acuerdo a la función objetivo planteada anteriormente y a lo expresado en la sección 3.1.2. Una de las restricciones más importantes del problema corresponde a las ecuaciones del modelado del campo en cada punto de observación respecto a los parámetros X seleccionados para la representación de la descarga.

Figura 4-8: Restricción Igualdad en Suelo Montañoso



De acuerdo con el capítulo 2, el problema de modelado, cuando las condiciones de frontera correspondientes al suelo corresponden a un relieve dado por $f_r(x,y)$, de acuerdo con esto el modelo del campo eléctrico debido a cambios en uno o varios centros de carga de densidad volumétrica $\Delta\rho_v$ como se muestra de manera gráfica en la Figura 4-8 se puede escribir de manera general como la solución del sistema de ecuaciones diferenciales expresado en (4-3).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta E}(x_i, y_i, z_i) &= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i \\ z=z_i}} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} &= -\frac{\Delta\rho_v(x,y,z)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (4-3)$$

- Con la condición de frontera : $\overrightarrow{\Delta E}(x,y,z) = 0$ y $\phi(x,y,z) = 0$ Para $-\infty < z \leq f_r(x,y)$ Para todo $x,y \in \mathbb{R}$

Sin embargo dado que los sensores utilizados para la observación del campo eléctrico ambiental, miden el valor del campo eléctrico de una sola componente vectorial, tal como se indicó en la sección 1.4.2 la disposición de los sensores como los molinos de campo eléctrico hace que se tome la componente respecto al eje z del campo eléctrico ambiental. Además debido a las condiciones de frontera las cuales corresponden a la superficie del relieve, de debido a esta condición, como se indicó en la sección 2.2.3 la solución de las ecuaciones determinadas por (4-3) se realizarán mediante método de elementos finitos, de acuerdo a lo anterior, la restricción debida al modelo $\overrightarrow{\Delta E}_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X)$ estará dada por:

$$\begin{aligned} \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X) &= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\Bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i \\ z=z_i}} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} &= -\frac{\Delta\rho_v(X)}{\epsilon} \end{aligned} \quad (4-4)$$

- Con la condición de frontera : $\overrightarrow{\Delta E}(x,y,z) = 0$ y $\phi(x,y,z) = 0$ Para $-\infty < z \leq f_r(x,y)$ Para todo $x,y \in \mathbb{R}$

Dónde $-\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ Corresponde a la componente en z del gradiente del potencial eléctrico ϕ obtenido de la solución de la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi = -\frac{\Delta\rho_v(x,y,z)}{\epsilon}$, dónde $-\frac{\Delta\rho_v(x,y,z)}{\epsilon}$ dependerá de los parámetros del modelo seleccionado acorde con la Tabla 4-1.

Tabla 4-1: Ecuación Diferencial Correspondiente a la Restricción de Tipo Igualdad del Problema

Modelo		Expresión Matemática	Parámetros a Encontrar (Variables Objetivo X)
Bipolar	Modelo Q Carga Puntual (n = 4)	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta Q \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_0)$ Con: <ul style="list-style-type: none"> $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ $\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k}$ 	Centro de Carga <ul style="list-style-type: none"> Cambio Carga: ΔQ P. Geográfica: x_0, y_0 Altura: z_0
	Bipolar (n = 7)	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta Q (\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_p) - \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_n))$ Con: <ul style="list-style-type: none"> $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ $\vec{r}_p = x_p \hat{i} + y_p \hat{j} + z_p \hat{k}$ $\vec{r}_n = x_n \hat{i} + y_n \hat{j} + z_n \hat{k}$ 	Centro de Carga Positivo <ul style="list-style-type: none"> Cambio Carga**: ΔQ P. Geográfica: x_p, y_p Altura: z_p Centro de Carga Negativo <ul style="list-style-type: none"> P. Geográfica: x_n, y_n Altura: z_n
	Bipolo Vertical (n = 5)	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \Delta Q (\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_{0+}) - \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_{0-}))$ Con: <ul style="list-style-type: none"> $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ $\vec{r}_{0+} = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_p \hat{k}$ $\vec{r}_{0-} = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_n \hat{k}$ 	Centro de Carga <ul style="list-style-type: none"> Cambio Carga: ΔQ P. Geográfica: x_0, y_0 Alturas Cargas: z_n, z_p
	Modelo Múltiples cargas (n = 4Nq)	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \sum_{k=1}^{Nq} (\Delta Q_k \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_k))$ Con: <ul style="list-style-type: none"> $\vec{r}_k = x_k \hat{i} + y_k \hat{j} + z_k \hat{k}$ 	Localizar Multipolos Para $k = 1, 2, \dots, Nq$: <ul style="list-style-type: none"> Cambio Carga: ΔQ_k P. Geográfica: x_k, y_k Altura: z_k

** Se considera para este modelo Cambios ΔQ de igual magnitud y signo opuesto ver sección 2.3.2 Si $D_n = D_p$ en el modelo bipolar para la representación bipolar propuesta por Jacobson y Krider [31], para este caso $n = 5$ ya que $x_n = x_p$ y $y_n = y_p$.

Adicional a la restricción anterior, se deben tener en cuenta las restricciones en los parámetros, los cuales se deben seleccionar de acuerdo a la región de solución de las ecuaciones planteadas en (4-3) y la Tabla 4-1, de acuerdo con esto las restricciones en cuanto a las coordenadas x, y de los centros de carga implicados en los modelos estarán determinadas por la región donde se extrajo el relieve, es decir:

$$\begin{aligned} x_{min} &\leq x \leq x_{max} \\ y_{min} &\leq y \leq y_{max} \end{aligned} \quad (4-5)$$

Observe que la restricciones anteriores fueron tomadas con referencia al área de estudio tomada acorde a la sección 1.6.2, observe de la Figura 4-8 que los límites del relieve tomado en coordenadas cartesianas están dados por: $x_{max} = y_{max} = 30km$, $y_{min} = x_{min} = 0$. Sin embargo de acuerdo como se explicó en la sección 3.1.2 él área de estudio está limitada a la cobertura que tienen los sensores de campo electroestático, que para una región plana,

ésta se puede considerar como una región circular, sin embargo, debido a que el comportamiento del campo electrostático debido a la presencia de una carga eléctrica cuando se tiene un relieve no plano el campo no tiene un comportamiento simétrico como se observó en los resultados obtenidos en la sección 2.3.1, entonces la región de cobertura de los sensores no es una región circular y su cobertura es diferente a la de un plano. Por esta razón, es matemáticamente complejo describir la zona de cobertura para regiones de relieve no plano.

En cuanto a restricciones de la altura z de los centros de carga, éstas están limitadas por la condición de frontera dada por el relieve del suelo $f_r(x, y)$, y por la altura máxima dónde se formen los centros de carga z_{max} por tanto

$$f_r(x, y) \leq z \leq z_{max} \quad (4-6)$$

Una restricción adicional que se debe tener en cuenta son los puntos singulares de las funciones tanto en el objetivo como las restricciones del problema, note que las expresiones dadas en la [Tabla 4-1](#) dependen de la función $\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_{cc})$ es una función delta de Dirac, dónde \vec{r}_i corresponde al vector posición del punto de observación, y \vec{r}_{cc} corresponde a la posición del centro de carga ($\vec{r}_0, \vec{r}_n, \vec{r}_p, \vec{r}_{0+}, \vec{r}_{0-}, \vec{r}_k$ de la [Tabla 4-1](#)), observe que si $\vec{r}_i = \vec{r}_{cc}$ entonces $\delta(\vec{r}_i - \vec{r}_{cc}) \rightarrow \infty$, lo que quiere decir que los centros de carga se encuentran sobre algún o algunos puntos de observación, para este caso se debe incluir una restricción adicional donde:

$$\vec{r}_i \neq \vec{r}_{cc} \quad (4-7)$$

4.3.3 Selección de los valores iniciales de los parámetros

Como se indicó en la sección 3.1.3 debido a que los algoritmos de optimización requieren de valores iniciales para los valores de los parámetros $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ del modelo utilizado para la representación del campo acorde con la [Tabla 4-1](#). Se debe encontrar la forma de encontrar el valor de un punto inicial $\mathbf{X}_s = [X_{s1}, X_{s2}, \dots, X_{sn}]$ que con suerte se encuentre relativamente cerca al valor óptimo del problema, ya que como se aclaró en la sección mencionada, la selección de éste valor compromete la convergencia del método de optimización.

En la sección 3.1.3 se determinó que para encontrar un valor apropiado de \mathbf{X}_s se debía encontrar de manera aleatoria un conjunto de N_s semillas $\mathbf{S} = \{\mathbf{X}_{s1}, \mathbf{X}_{s2}, \dots, \mathbf{X}_{sN_s}\}$ de valores aleatorios, teniendo en cuenta las distribuciones de probabilidad de los parámetros del

modelo X_1, X_2, \dots, X_n , cada valor de S es evaluado en la función objetivo del problema, de tal manera que el valor de X_S elegido será el elemento del conjunto S que de el menor valor de la función objetivo.

Sin embargo, cabe notar que a diferencia del problema tratado en el capítulo 3, los modelos utilizados para la representación de ΔE de la restricción igualdad del problema, son resultado de la solución exacta de las ecuaciones de Maxwell. Además, como se aclaró en el desarrollo del capítulo 2, el tiempo computacional requerido para la evaluación numérica de los modelos exactos usados en suelo plano es inferior al tiempo requerido para evaluar el campo mediante la solución numerica de la ecuación diferencial definida en (4-4).

Debido a la razón anterior, no es práctico realizar la metodología descrita en la sección 3.1.3 para encontrar el valor de X_S . Sin embargo, como se mostró en la sección 4.2 la solución del problema de localización usando el modelado de suelo plano entrega como resultado una aproximación con incertidumbre a los parámetros del modelo. De este modo, se propone como método de selección de semilla el uso de la solución del problema con modelo plano es decir:

$$X_S = X^* = \arg \left(\min_x \|\overrightarrow{\Delta E m} - \overrightarrow{\Delta E}(X)\|^2 \right) \quad (4-8)$$

De (4-8) $\overrightarrow{\Delta E}(X) = [\Delta E_1(x_1, y_1, X) \quad \Delta E_2(x_2, y_2, X) \quad \dots \quad \Delta E_m(x_m, y_m, X)]^T$ dónde $\Delta E_i(x_i, y_i, X)$ corresponde a los modelos de suelo plano considerados en la sección 3.1.2 calculados en los m puntos de observación y $\overrightarrow{\Delta E m} = [\Delta E m_1 \quad \Delta E m_2 \quad \dots \quad \Delta E m_m]$ corresponde a los campos observados en el suelo de relieve montañoso, por tanto, bajo éstas condiciones la semilla será la solución del problema bajo la metodología propuesta en la sección 3.2.

4.3.4 Convergencia criterio de parada y optimalidad

Debido a que para este problema, el modelo utilizado para ΔE no tiene una representación exacta, no se cuenta con las expresiones exactas de las derivadas de éstas función, por lo que no se cuenta con los gradientes y/o Hessianos de las funciones con los que se pueda definir un criterio de optimalidad exacto tal como se definió para el problema de suelo plano en la sección 3.1.4. Sin embargo, se pueden definir los valores de éstos de manera numérica aproximando el gradiente mediante diferencias finitas y el Hessiano mediante la fórmula de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno

[65]. Sin embargo sería poco práctico la evaluación de éstos parámetros debidos a las múltiples soluciones mediante el método de elementos finitos de (4-4) las cuales se incrementan al aumentar el número de parámetros considerados en el modelo.

Debido a lo anterior, dado que para los métodos implementados se requiere establecer un criterio de parada, para este problema se definieron los siguientes criterios:

Valor de la función objetivo, dado que la función definida corresponde a una reducción de mínimos cuadrados, su valor ideal corresponde a que el residuo sea cero, sin embargo, debido a las múltiples fuentes de incertidumbre que tiene el problema, entonces se debe definir una incertidumbre a la norma del residuo

$$\|\overrightarrow{\Delta Em} - \overrightarrow{\Delta E}(X_k)\|^2 \leq \varepsilon_f \quad (4-9)$$

Criterio de Convergencia, Debido a que el problema entrega una aproximación al valor óptimo real, dependiendo de la semilla inicial en cada iteración se genera un nuevo y con suerte mejor valor de los parámetros X que hacen que cuando el algoritmo converja, las variaciones en los parámetros o en la función objetivo sea relativamente pequeña, por esta razón dado que no se usara información de gradiente o Hessiano se definirá un criterio de parada heurístico donde se compara el valor de los parámetros en iteraciones consecutivas definiendo una incertidumbre ε_k para la variación.

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \varepsilon_k \quad (4-10)$$

Cabe notar que ninguno de los algoritmos implementados, garantiza convergencia, por lo que adicionalmente, se definirá un criterio de parada limitando el número máximo de iteraciones de tal manera que se evaluará en cada iteración $k \leq k_{max}$.

Cabe anotar que no hay manera de definir de manera exacta los valores de las incertidumbres $\varepsilon_k, \varepsilon_f$ o del número máximo de iteraciones k_{max} , los cuales se pueden definir empíricamente o a través de análisis estadístico como se hará en éste trabajo.

4.4 Metodología Para la evaluación de parámetros de las descargas en suelo no plano.

De manera análoga a como se definió el problema en la sección 3.2, si se tiene en cuenta la función objetivo definida en (4-2) además de la restricción de tipo igualdad definida en (4-4) y las restricciones definidas en (4-5), (4-6) y (4-7) el problema de

optimización que se debe resolver corresponde al definido en (4-11):

$$\min_X F(X) = \sum_{i=1}^m (\Delta E m_i - \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X))^2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X) &= - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i \\ z=z_i}} \\ \bullet \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= - \frac{\Delta \rho_v(X)}{\epsilon} \\ \bullet \quad \text{Con la condición de frontera : } \vec{\Delta E}(x, y, z) &= 0 \text{ y} \\ \phi(x, y, z) &= 0 \text{ Para } -\infty < z \leq f_r(x, y) \text{ Para todo} \\ x, y &\in \mathbb{R} \\ x_{min} &\leq x \leq x_{max} \\ y_{min} &\leq y \leq y_{max} \\ f_r(x, y) &\leq z \leq z_{max} \end{aligned} \quad (4-11)$$

De igual manera como se definió en la sección 3.2 del problema definido en (4-15), tanto la función objetivo $F(X)$, la restricción igualdad $\Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X)$, y la restricción desigualdad referente a z , son funciones no lineales, por lo que el problema es de programación no lineal.

Con el propósito de simplificar los métodos de optimización utilizados para resolver el problema de encontrar los parámetros de la descarga, Se omitirán las restricciones de tipo desigualdad del problema definido en (4-15), y la restricción de tipo igualdad será introducida en la función objetivo, quedando un problema de programación no lineal sin restricciones como el que se define en (4-12).

$$\begin{aligned} \min_X F(X) &= \sum_{i=1}^m (\Delta E m_i - \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X))^2 \\ \text{Con: } \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X) &= - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i \\ z=z_i}} \\ \bullet \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= - \frac{\Delta \rho_v(X)}{\epsilon} \\ \bullet \quad \text{Con la condición de frontera : } \vec{\Delta E}(x, y, z) &= 0 \text{ y} \\ \phi(x, y, z) &= 0 \text{ Para } -\infty < z \leq f_r(x, y) \text{ Para todo} \\ x, y &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4-12)$$

Cabe notar que para el problema de optimización definido anteriormente, es necesario evaluar la convexidad del problema, de manera similar de manera similar al método usado en la sección 3.2 bajo los siguientes criterios:

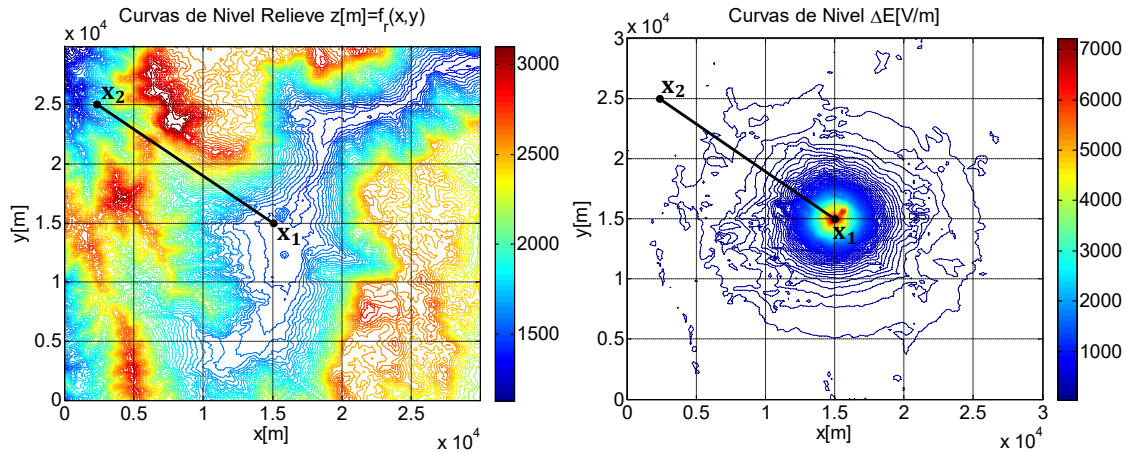
- Convexidad del dominio de la función: de acuerdo a las restricciones definidas en la sección 4.3.2, los límites del dominio de la función están ligados a los límites del área de estudio dónde se extrajo la función del relieve $f_r(x,y)$, además debido a la condición de frontera de la ecuación (4-3), los límites del dominio están dados por los extremos del relieve seleccionado para el área de estudio y la solución encontrada es por encima del relieve del suelo de dicha área. De acuerdo con lo anterior, el dominio está dado de acuerdo a la función expresada en (4-15). El dominio no es convexo debido a las siguientes razones

$$dom(F(X)) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} x_{min} \leq x \leq x_{max} \\ y_{min} \leq y \leq y_{max} \\ z \geq f_r(x, y) \end{array} \right. \right\} \quad (4-13)$$

- Condición de convexidad: Para este caso note que todos los modelos electrostáticos se pueden ver como la superposición de múltiples cargas eléctricas y de esta manera el campo eléctrico se puede analizar como la superposición de los campos de cada carga tal como se indicó en la sección 2.2.1, es decir que cualquier modelo de la Tabla 4-1 se puede ver como la suma de soluciones de (4-14) para distintos centros de carga ΔQ_k en la posición \vec{r}_k bajo las condiciones de frontera definidas en la ecuación (4-12).

$$\Delta E = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \text{ con } \nabla^2 \phi = \Delta Q_k \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \quad (4-14)$$

De lo anterior, evaluar la condición de convexidad definida en la sección 3.2, se debe evaluar la convexidad de (4-14). En primer lugar se debe notar que el conjunto solución no es convexo, ya que si se toma como referencia las curvas de nivel observadas del comportamiento del relieve $f_r(x,y)$ se observa que al tratarse de un relieve montañoso, existen variaciones de nivel que hacen que si se toman dos puntos arbitrarios sobre el relieve por ejemplo X_1 con $x = 15km, y = 15km$ y X_2 con coordenadas $x = 2.5km, y = 25km$, hace que el conjunto del dominio no sea convexo ya que el segmento de recta que une a X_1 y a X_2 contiene puntos por debajo del relieve.

Figura 4-9: Curvas de Nivel de Relieve y Campo

Adiciona a lo anterior, con el propósito de ilustrar el comportamiento de la solución de la ecuación (4-14), donde para un punto de observación de coordenadas $\vec{r}_i = [15km \ 15km \ 1,49km]$ se realizó un barrido de cargas con $\Delta Q = 1C$ variando el valor de $\vec{r}_k = [x_k \ y_k \ 6km]$ en el área de estudio. Para éste caso no se realizó la prueba de convexidad propuesta en la sección 3.2 dado que para los puntos X_1 y X_2 propuestos hay puntos que no pertenecen al dominio de (4-14).

Debido a lo anterior, el problema definido en (4-12) es un problema de optimización no convexo y no lineal, por lo cual los métodos de solución planteados requieren tener de información del comportamiento del gradiente con fin de encontrar la dirección de búsqueda del mínimo a partir de los valores iniciales de los parámetros del problema.

Dado que la función objetivo está asociada con la solución de una ecuación diferencial parcial por un método de elementos finitos, $\Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, X)$ corresponde a una solución numérica, por lo que no se cuenta con expresiones exactas para los valores de las derivadas de ΔE_{FEM} respecto a los parámetros del problema. Razón por la cual los métodos de solución seleccionados deben basarse en la evaluación de la función objetivo contando con las siguientes alternativas:

- Uso de algoritmos evolutivos: propuesto en la sección 1 es uno de los métodos viables para encontrar la solución ya que no requiere la evaluación de gradiente, sin embargo, el costo computacional para la solución de este problema es considerablemente alto debido a que por cada iteración se deben realizar $N_\mu = 500$ evaluaciones del campo solucionando por FEM.

- Aproximación Numérica del Gradiente, como se indicará en la sección 4.4.1, se puede realizar la solución del problema mediante el método de Gauss-Newton aproximando el gradiente por la aproximación numérica de las derivadas del Jacobiano mediante diferencias centrales, sin embargo la cantidad de evaluaciones de ΔE_{FEM} por cada iteración es el doble de la cantidad de parámetros asociado con el modelo.
- Método de Nelder-Mead: este método será propuesto en la 4.4.2, el cual busca la dirección de búsqueda mediante la evaluación de la función objetivo, requiere de menos evaluaciones de la función objetivo que los métodos anteriores dado que por cada iteración, el método entrega una solución que mejora paso a paso el valor de la función objetivo.

4.4.1 Método usando aproximación numérica del gradiente.

De acuerdo con lo descrito anteriormente, los métodos de solución consisten en el ajuste de los valores de la semilla de tal manera que se encuentre por cada iteración un nuevo y con suerte mejor valor de los parámetros del modelo utilizado para representar la descarga eléctrica atmosférica.

Dado que para la función objetivo, no se puede tener una función analítica de la expresión que representa los cambios en el campo eléctrico ΔE_{FEM} en cada punto de observación y en cambio se cuenta con una solución numérica dada por un método de solución por método de elementos finitos. Debido a lo anterior, si se desea implementar un algoritmo que use la información del gradiente, se debe realizar una aproximación numérica de las derivadas parciales implicadas en el gradiente o Jacobiano de $F(X)$ respecto a los parámetros X del problema.

Cómo se indicó en la sección 3.2.1 el método de Gauss-Newton, sólo se requiere de la evaluación del Jacobiano de la función del residuo, entonces se utilizó un método de diferencias finitas basado en las diferencias centrales con el fin de describir de manera numérica la matriz del Jacobiano del problema. Donde cada derivada parcial puede ser aproximada como la pendiente de la función tomando dos puntos separados a una distancia h respecto al parámetro X_j en el que se evalúa la derivada usando como referencia un punto central X_k como se indica en la ecuación (4-15).

$$\frac{\partial r(X_{(k)})}{\partial X_j} \approx \left. \frac{r\left(X_j + \frac{1}{2}h_j\right) - r\left(X_j - \frac{1}{2}h_j\right)}{h_j} \right|_{X_{(k)}} \quad (4-15)$$

De lo anterior, el jacobiano $\nabla r(X_{(k)}) \approx \tilde{\nabla} r(X_{(k)}, h_{(k)})$ de la función del residuo $r(X_{(k)})$ será aproximado numericamente a $\tilde{\nabla} r(X_{(k)}, h_{(k)})$ mediante la evaluación de la función del residuo en dos puntos por cada parámetro X_j con $j = 1 \dots n$ del modelo asociado a la función del residuo, es decir que la evaluación del jacobiano requiere de **2n** evaluaciones de $r(X_{(k)})$ lo que implica resolver la ecuación diferencial especificada en (4-4) por método de elementos finitos **2n** veces.

El valor de $h_{(k)}$ dependerá de la magnitud de los parámetros asociados al modelo de la descarga, por ejemplo para el modelo **Q** los parámetros x_0, y_0, z_0 son en el orden de miles de metros, mientras que ΔQ dependiendo si el centro de carga es positivo o negativo llega a valores máximos de decenas de Coulombios, razón por la cual $h_{(k)} = [h_1, h_2, \dots, h_n]$ es un conjunto de valores cuya magnitud depende de los parámetros del modelo, por ejemplo para el modelo **Q** $h_{(k)} = [10 \ 10 \ 10 \ 0.1]$.

Teniendo en cuenta lo anterior, las Figura 4-10 muestra de manera ilustrativa el método de solución usando el modelo FEM. En general el método es similar al planteado en la sección 3.2.1, a diferencia de que en cada iteración se calcula el jacobiano numérico de la función del residuo. Los valores iniciales o de semilla son obtenidos de acuerdo al análisis realizado en la sección 4.3.3.

con el fin de mejorar la convergencia del método, los valores de h son cambiados en cada iteración, observando el comportamiento del residuo para cada nuevo valor estimado $X_{(k+1)}$ de tal manera que:

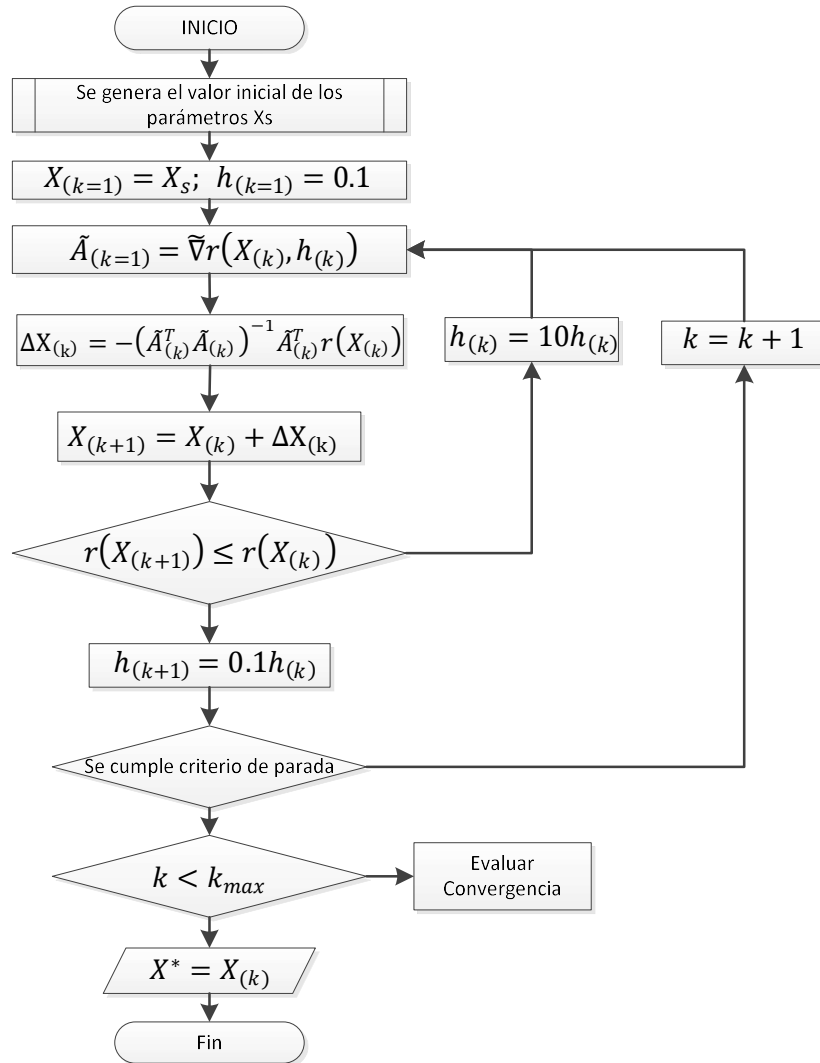
- Si $r(X_{(k+1)}) \leq r(X_{(k)})$ entonces se asume que la dirección de búsqueda de la función, por lo que para la siguiente iteración $h_{(k+1)} = 0.1h_{(k)}$ es decir se disminuye el tamaño de paso de las derivadas para encontrar el mínimo de la función y se pasa a la siguiente iteración.
- Si $r(X_{(k+1)}) > r(X_{(k)})$ entonces $h_{(k)} = 10h_{(k)}$ se aumenta el tamaño de paso para intentar encontrar la dirección descendente, no se avanza a la siguiente iteración hasta que se encuentre un valor apropiado de $h_{(k)}$

Lo anterior no garantiza que el algoritmo converja, y no garantiza encontrar el mínimo global de la función, sin embargo mejora la cantidad de iteraciones requeridas ya que refina la búsqueda cuando se acerca al mínimo de la función.

Luego, para cada iteración, se evalúan los criterios de parada especificados en la sección 4.3.4

Finalmente, de acuerdo a la cantidad de iteraciones y al observar el comportamiento de los valores de los parámetros encontrados se podrá analizar la convergencia del algoritmo.

Figura 4-10: Método Gauss-Newton Gradiente Aproximado

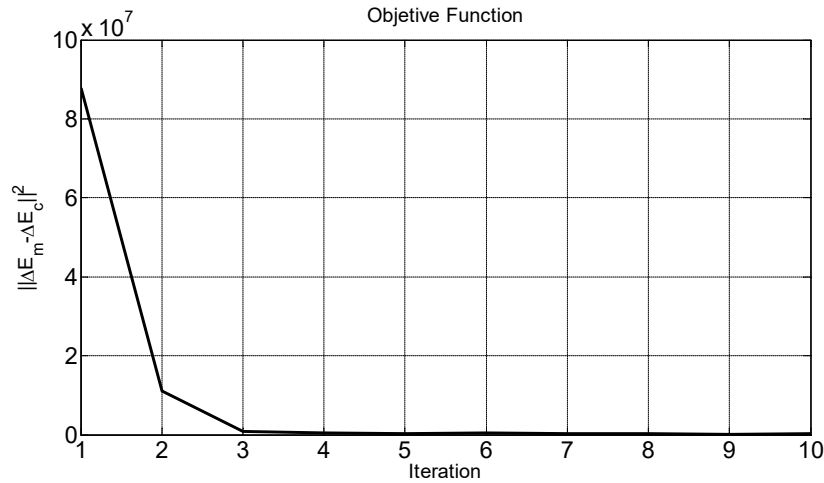


Una vez hecho lo anterior, para observar el comportamiento del algoritmo de optimización implementado, Usando Cinco puntos de observación, (Identificados como S1-S5 en la Figura 4-1), se resolvió el problema de optimización definido en la ecuación (4-12), utilizando como ejemplo el modelo Q de una sola carga

puntual cuyos parámetros $X = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \Delta Q]$ son encontrados sin agregar incertidumbre a los valores ΔE_m en cada punto de observación.

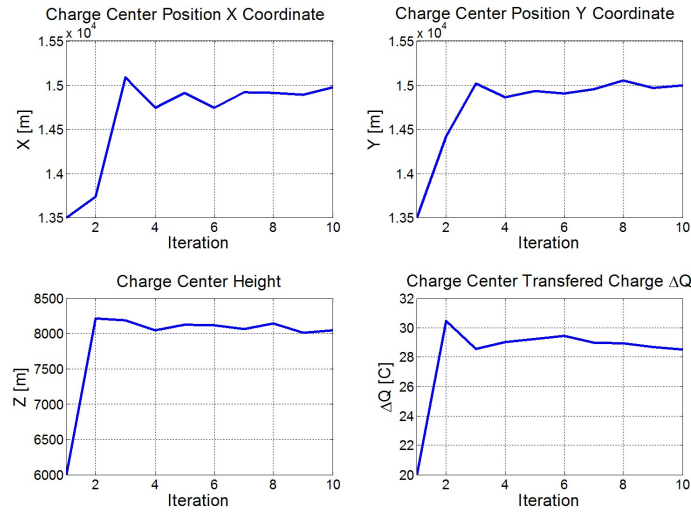
Para hacer esto, se propuso el problema de localizar un centro de carga con los siguientes parámetros: $X = [15km \ 15km \ 8km \ 28C]$, al ejecutar el algoritmo descrito, la Figura 4-11 muestra el comportamiento de la función objetivo en cada iteración, donde se puede observar un comportamiento análogo al de los métodos de reducción de minimos cuadrados cuando se cuenta con una expresión analítica de los valores de los gradientes.

Figura 4-11: Comportamiento Función Objetivo con Aproximación de Gradiente



La Figura 4-12 muestra el comportamiento de la evolución de los parámetros utilizando como valor de semilla $X_s = [13,5km \ 13,5km \ 6km \ 20C]$, donde se puede observar con relación al gráfico anterior, los valores de los parámetros alcanzan un valor de convergencia después de la séptima iteración

Figura 4-12: Comportamiento de los Parámetros Modelo Q Usando Aproximación del Gradiente.



Bajo las condiciones anteriores, se encuentran los valores estimados de los parámetros $X^* = [14,97km \ 14,96km \ ,046km \ 28,53C]$, para el método descrito, se nota que a pesar de que para este caso no se asumió incertidumbre en los datos medidos, se observa incertidumbre en los parámetros encontrados, esto es debe a que los métodos de solución por método de elementos finitos tienen incertidumbre asociada a la magnitud del mallado del problema tal como se indicó en la sección 2.2.3.

Adicional al resultado anterior, también se realizó la simulación del problema bajo las condiciones planteadas en la sección 4.1, cuyos resultados son mostrados en el desarrollo de la sección 4.5.

4.4.2 Método Nelder-Mead

Propuesto por J.A. Nelder y R Mead (1965) [67]. El cual es un algoritmo de optimización dónde a partir de una función objetivo de n parámetros $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ el algoritmo se basa en un politopo en \mathbb{R}^n de n dimensiones y $n+1$ vértices conocido como Simplex. El cual se va actualizando tras cada iteración para encontrar el mínimo de una función objetivo $F(X)$.

Para la implementación de éste método se utilizo la función `fminsearch` del Toolbox de optimización de Matlab®, el cual implementa el algoritmo de Nelder - Mead bajo la descripción realizada por Lagarias et al [68] el cual es descrito de manera más detallada en el Anexo C, el cual consiste en la modificación repetitiva del simplex donde por cada iteración se tienen al menos cuatro evaluaciones del campo por FEM el cual se busca la

dirección del mínimo de la función mediante la Expansión, Reflexión, Contracción Interna y Contracción Externa del politopo del simplex.

En cuanto a la selección de la semilla, para éste método se optó por la metodología propuesta en la sección 4.3.3, y en cuanto a los criterios de parada tenidos en cuenta por la función `fminsearch` se tienen en cuenta los siguientes criterios de la sección 4.3.4 cuya asignación se detalla en [65]:

- El número máximo de iteraciones ***kmax*** : por defecto el parámetro `MaxIter` es de **200n**.
- Tolerancia en la función objetivo: por defecto el parámetro `TolFun` es de $\epsilon_f = 1 \times 10^{-4}$.
- Tolerancia en la convergencia de ***X***: por defecto el parámetro `TolX` es $\epsilon_k = 1 \times 10^4$

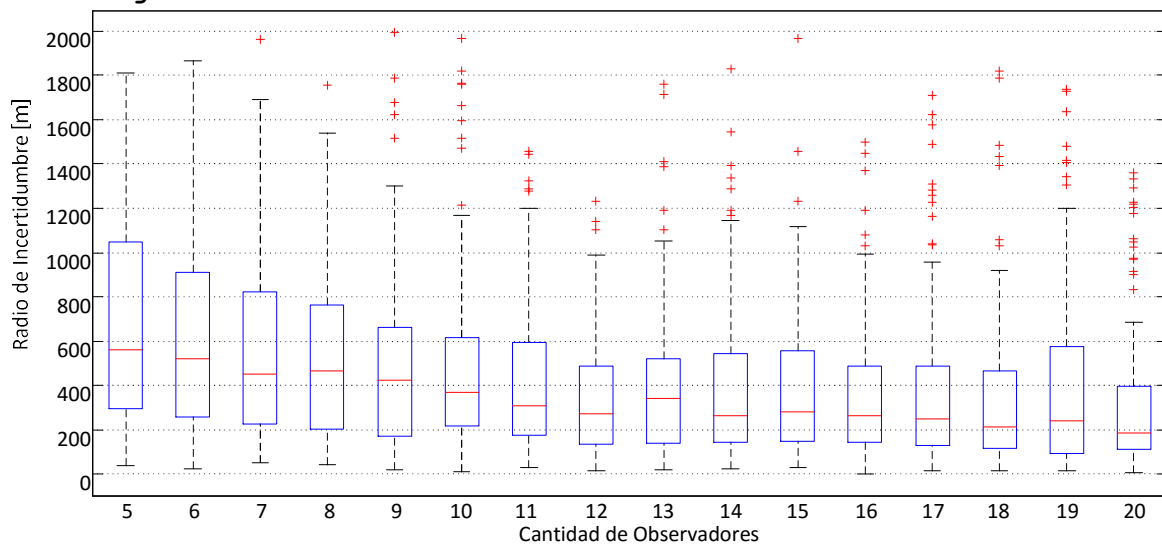
Para la prueba de éste algoritmo, se soluciona el problema de encontrar los parámetros del modelo Q , $X = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \Delta Q]$, teniendo en cuenta el problema descrito en la ecuación (4-12), y el modelo de la Tabla 4-1, el problema se puede escribir tal como se indica en la ecuación (4-16)

$$\min_{x_0, y_0, z_0, \Delta Q} \sum_{i=1}^m (\Delta E m_i - \Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, x_0, y_0, z_0, \Delta Q))^2$$

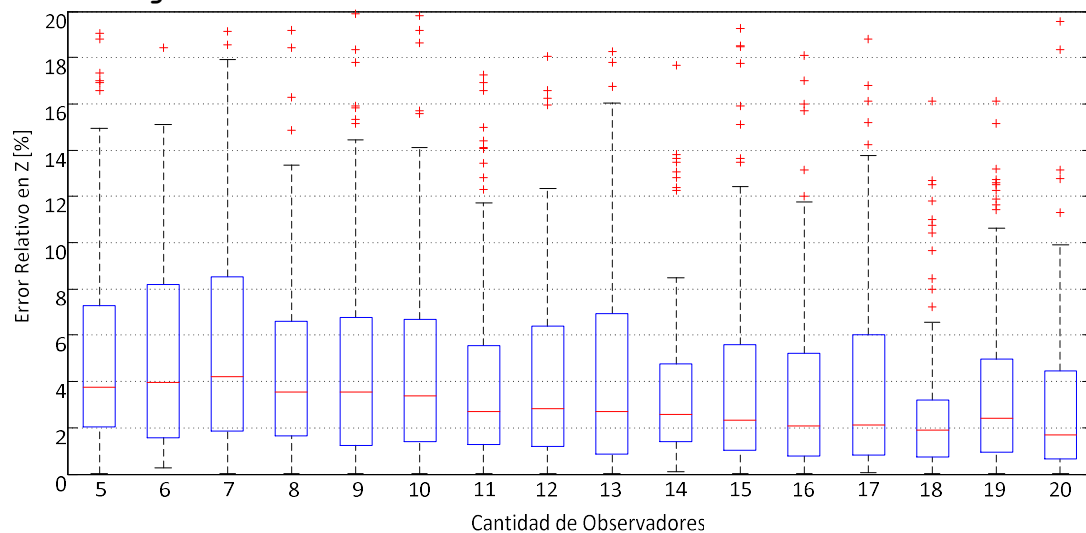
Con: $\Delta E_{FEM}(x_i, y_i, z_i, x_0, y_0, z_0, \Delta Q) = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i \\ z=z_i}}$

$$\begin{aligned} & \bullet \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\Delta Q \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_0) \\ & \bullet \text{Con la condición de frontera : } \vec{\Delta E}(x, y, z) = 0 \text{ y } \Phi(x, y, z) = 0 \text{ Para } -\infty < z \leq f_r(x, y) \text{ Para todo } x, y \in \mathbb{R} \\ & \bullet \text{Dónde: } \vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}; \vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k} \end{aligned} \quad (4-16)$$

Del problema anterior el campo medido $\Delta E m_i$ es tomado mediante la evaluación del método de elementos finitos para cada uno de los centros de carga definidos en la sección 4.1 agregando una incertidumbre del 10%. Luego se evaluó la estimación de parámetros para cada uno de los 250 centros de carga definidos, haciendo 15 casos variando la cantidad de puntos de observación desde 5 hasta 20 bajos las mismas condiciones planteadas en la sección 4.2.

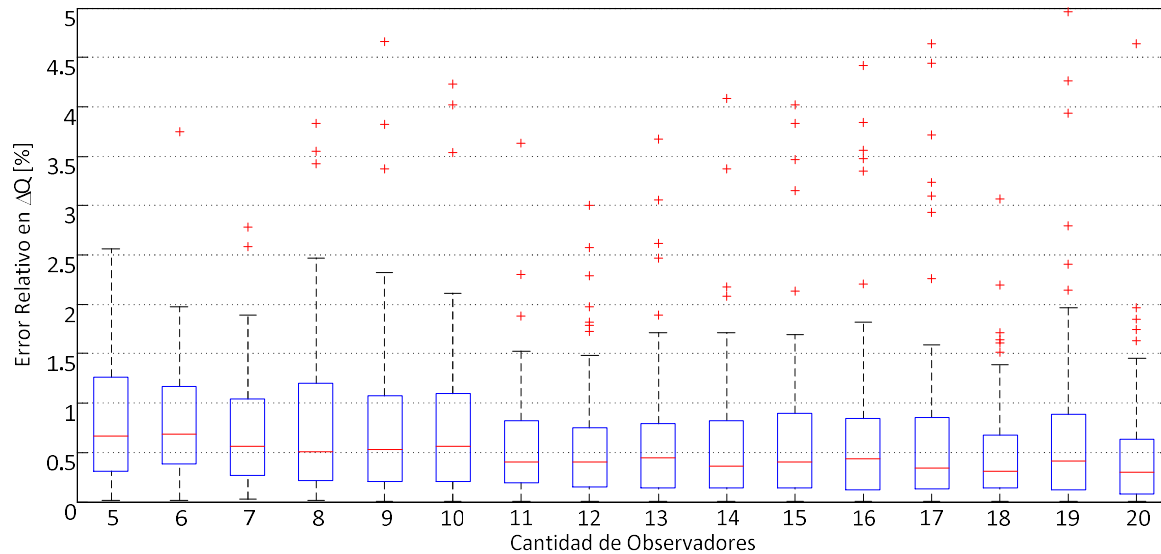
Figura 4-13: Incertidumbre en la Localización Modelo FEM

La Figura 4-13 muestra el comportamiento de la incertidumbre en la localización, como la distancia entre las coordenadas x,y entre los valores estimados y los valores de referencia para cada uno de los 250 casos evaluados variando la cantidad de puntos de observación. En general, tanto para la incertidumbre en la localización, como en la altura y la carga eléctrica, tiene un comportamiento descendente pero asintótico debido a que para éste caso siempre se tendrá incertidumbre en la medición, a primera vista, se observa que la incertidumbre presenta mejores resultados respecto a los errores encontrados en la sección 4.2, lo que se puede decir que el uso de modelos más complejos de la representación del campo incluyendo el relieve mejora la incertidumbre.

Figura 4-14: Incertidumbre en la Altura Modelo FEM

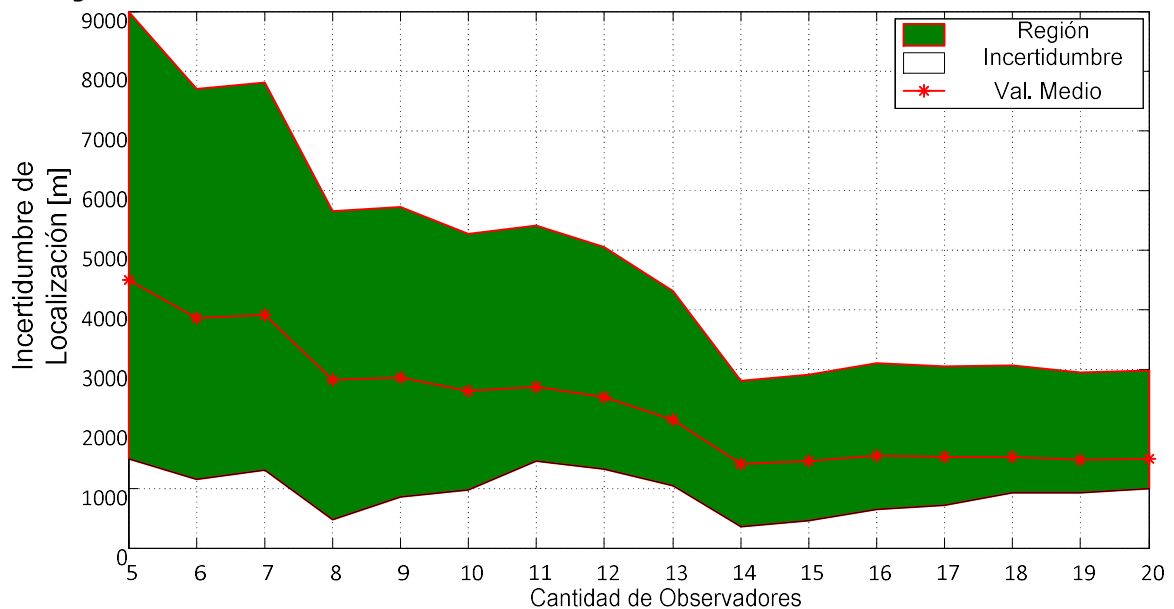
En cuanto al comportamiento en la incertidumbre en la altura del centro de carga la cual se puede observar en la [Figura 4-14](#) y el de la carga eléctrica en la [Figura 4-15](#), se observa que respecto a la incertidumbre de localización, los valores de éstos parámetros se ven afectados en valores porcentuales del inferiores al 10% y en general se ven menos afectados respecto a las coordenadas en x,y siendo condecendientes con los resultados obtenidos en el desarrollo del Capítulo 3.

Figura 4-15: Incertidumbre en la Carga Eléctrica Modelo FEM



4.5 Comparación de Resultados

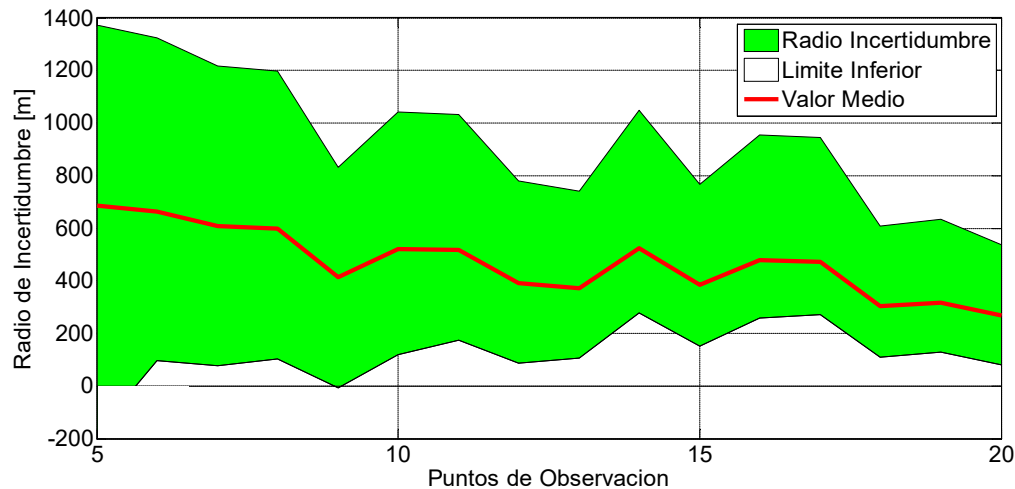
Debido a que el objetivo principal de la tesis es encontrar una metodología que permita solucionar el problema de estimación de parámetros de las descargas desde el punto de vista de observaciones del campo eléctrico, se realizó una comparación general de los resultados obtenidos con los métodos de solución propuestos respecto al método usando los modelos con suelo plano.

Figura 4-16: Incertidumbre Localización Modelo Plano en Relieve

La Figura 4-17 Muestra el comportamiento en la incertidumbre de localización cuando se asume un modelo plano en el campo de un suelo con un relieve montañoso. Donde se muestra el comportamiento del valor medio μ bajo las condiciones propuestas en la sección 4.2, es decir solo se observa la sensibilidad del problema de optimización descrito en (4-1) respecto al uso de un modelo de carga puntual con suelo plano, se observa que si se tienen en cuenta los resultados obtenidos usando un modelo con relieve, la incertidumbre de localización mejora, tal como se muestra en la Figura 4-17 dónde se soluciona el problema mediante gradiente numérico y en la Figura 4-18 donde se soluciona el problema mediante el método de Nelder-Mead.

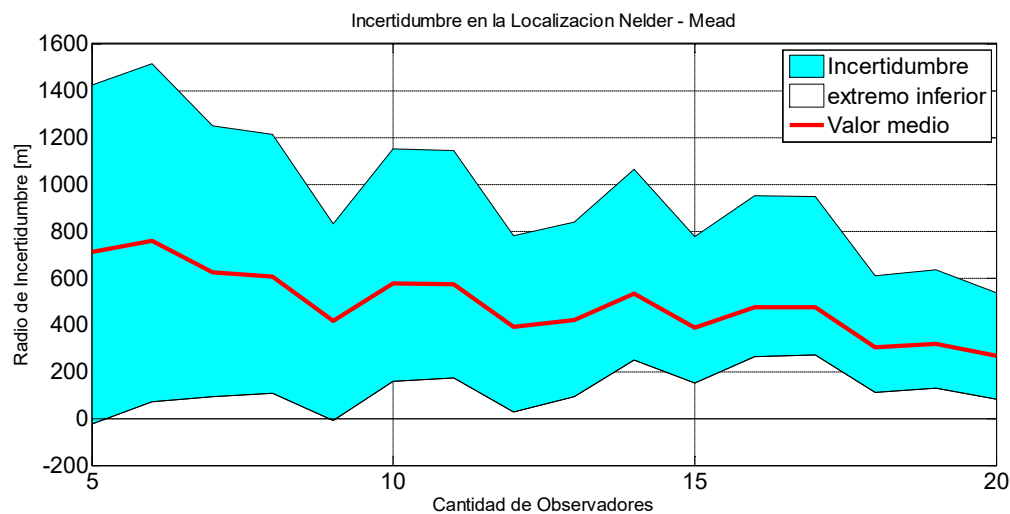
De lo anterior, se puede notar que la metodología propuesta mejora la incertidumbre en los parámetros asociados a las descargas eléctricas atmosféricas, es decir que los modelos de carga puntual no se pueden generalizar para todos los relieves, lo cual hace necesario el uso de modelos que tengan el detalle de tener en cuenta las condiciones del relieve. Ya que como se observa en la Figura 4-16 incluso incrementando el número de sensores hace que la incertidumbre esté acotada y tenga errores medios alrededor de 2000m. Lo que indica que incrementar el número de observadores en un relieve tampoco mejora la incertidumbre y más contando con el agravante que para el experimento de modelo plano no se tuvo en cuenta incertidumbre en el campo medido generado con el modelo de relieve.

Figura 4-17: Incertidumbre Localización Modelo FEM. Método Gradiente Numérico
Radio de Incertidumbre en la Localización Metodo GN con FEM



En cuanto a los resultados de los métodos de optimización propuestos para la solución del problema se observa que tanto el método de Gauss-Newton con aproximación numérica del gradiente respecto al método de Nelder-Mead, tienen resultados muy similares respecto a la incertidumbre de localización.

Figura 4-18: Incertidumbre Localización Modelo FEM. Método Nelder-Mead



Sin embargo dado que para el método del método de Gauss-Newton se requieren de al menos $2n$ (para este caso 8) evaluaciones del campo por iteración, hacen que éste método sea computacionalmente más costoso respecto al método de Nelder-Mead El cual requiere de al menos n evaluaciones del campo.

Tabla 4-2: Comparación de Resultados

Parámetro		Elementos Finitos Sin Error	Elementos Finitos GN Error 10%	Elementos Finitos NM Error 10%	Modelo Plano
Tiempo[s]	μ	7626,2	8221.2	3721.2	24,314
	σ	1632,4	1207	607	3,54
Incertidumbre Localización [m].	μ	126,23	788,07	748,07	2732,2
	σ	123,56	642,68	753,12	1734
Error Altura [m]	μ	48,2	293,44	261,144	928
	σ	25,632	288,64	287	704
Error ΔQ [%]	μ	0,39	2,4	2,34	32,2
	σ	0,08	17,263	16,263	31,2

La Tabla 4-2 muestra una comparación de los resultados obtenidos en cuanto los valores medios μ y la desviación estándar σ de las incertidumbres en los parámetros y el tiempo de computación para los métodos implementados con y sin incertidumbre utilizando un modelo con relieve en contraste al usar el modelo plano.

En general se puede observar que aunque la solución para el modelo plano es computacionalmente más rápida, los errores en los parámetros estimados son significativamente altos comparados con los de usar un modelo con relieve, sin embargo debido a la velocidad del método lo hace mas conveniente para analizar la información del comportamiento de las tormentas en tiempo real, respecto a los métodos que usan un modelo con relieve.

5 Conclusiones

Se logró mostrar que el uso de modelos con aproximación de suelo plano para la representación del comportamiento del campo en un suelo montañoso no es suficiente para evaluar su comportamiento, adicionalmente, el uso de correcciones lineales a éstos modelos no logran mejorar el error relacionado con el comportamiento del campo.

A pesar de que el estudio de las tormentas eléctricas mediante observaciones del campo eléctrico ambiental tenga limitaciones relacionadas con el área de cobertura de los dispositivos de medida, Cabe notar que éste tipo de observaciones permite tener información a priori del comportamiento de las tormentas, algo que debe ser considerado en regiones montañosas, donde tanto las nubes, los vientos y las tormentas asociadas, tienen un comportamiento diferente a regiones donde la topografía del suelo es plana.

Si bien para el caso donde el suelo es ideal, el radio de cobertura de los sensores de campo eléctrico, se puede considerar como una región radial y simétrica, para el caso de que los sensores se encuentren en una región montañosas, ésta consideración no puede ser tomada en cuenta, dado que en éstas regiones el comportamiento eléctrico de las tormentas no tiene un comportamiento simétrico, además la misma montaña u edificio cercano al sensor "apantalla" el campo eléctrico de algunas regiones cercanas al sensor.

Se demostró de manera matemática y numérica, que las ecuaciones de los modelos usados para la determinación de los parámetros de las tormentas, no pueden ser ajustados mediante constantes de proporcionalidad, ya que éstos modelos tienen un comportamiento no lineal respecto a la ubicación de las cargas eléctricas.

En los experimentos numéricos planteados en el desarrollo de éste trabajo, se mostró que uno de los parámetros mas sensibles a la incertidumbre en las medidas en las redes de sensores, corresponden a la ubicación geográfica de los eventos asociados con las tormentas. Debido a este hecho, se realizó un estudio donde se consideró un modelado más realista del campo eléctrico,

con lo cual se logró mejorar significativamente la incertidumbre de todos los parámetros asociados a las tormentas.

Cabe notar, que cuando se considera el modelado del comportamiento del campo eléctrico en una región de relieve montañoso, una de las diferencias claves respecto al modelado con suelo plano ideal, consiste en las condiciones de frontera y de continuidad del campo eléctrico, dónde la dirección del campo no tiene que coincidir con alguno de los ejes de referencia tomados para el modelado, ya que para el caso que se estudio, la superficie del relieve no siempre es paralela al plano x,y (para un sistema cartesiano) por lo tanto el campo normal a la superficie no coincide con el eje z . De esto cabe destacar que una de las causas adicionales de incertidumbre en la medición consiste en tener en cuenta la orientación del sensor respecto al suelo, y que para relieves montañosos, en las laderas de las montañas, el campo a nivel del suelo tiene componentes vectoriales en varias direcciones.

Uno de los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo, consiste en que, no hay manera de despreciar la incertidumbre entre el campo eléctrico estimado mediante un modelo de suelo plano ideal y con el relieve, ya que como se demostró esto incrementa el error de modelado en los métodos de optimización usados para la solución del problema de localización, por lo tanto esto hace que la incertidumbre de los parámetros encontrados asociados a las tormentas tengan incertidumbres tan altas que la solución entregada por los métodos pueden no tener sentido lógico, matemático o físico.

Si bien, el mallado que se utiliza para el modelado del campo mediante solución por el método de elementos finitos influye en el tiempo de cómputo por razones lógicas (Incremento de la cantidad de elementos y de nodos), es importante elegir, un mallado apropiado de tal manera que no se pierdan detalles en la solución del campo, pero que tampoco sea muy pequeño, ya que esto hace que la solución del problema de localización llegue a ser computacionalmente inviable debido a las múltiples evaluaciones del campo eléctrico requeridas en los métodos de optimización planteados como solución al problema de estimación de parámetros.

A pesar de que los métodos de localización usando modelos de campo con suelo ideal, tienen una incertidumbre alta cuando son sometidos a condiciones donde el suelo es montañoso. La solución de éstos métodos es más rápida, lo que los hace más apropiados para tener una estimación aproximada de los parámetros asociados a las tormentas. Además el resultado obtenido con éstos métodos, sirven de semilla para métodos que usen modelos más complejos.

Se ha propuesto una metodología para la localización de eventos de tormentas eléctricas basados en medidas de campo electrostático usando la información del relieve.

El método propuesto responde a una mejora en la incertidumbre de los parámetros que se deben encontrar en las tormentas con relación a métodos y modelos tradicionales.

El método propuesto es extensible a casos donde se requiera evaluar el comportamiento de otros parámetros del suelo u otras geometrías de carga

A pesar de que se utilizó un software licenciado como el COMSOL Multiphysics y Matlab como herramientas para la implementación de los modelos y métodos propuestos, cabe notar que éstos pueden llegar a ser implementados en herramientas de uso libre.

De acuerdo con los resultados del Capítulo 4, una de las sugerencias que se puede utilizar con el fin de evitar el modelado del campo electrostático consiste en utilizar una cantidad relativamente alta de sensores en la región donde el suelo no es plano, sin embargo, a pesar de que los sensores tienden a ser más económicos, compactos y precisos, aumentar la cantidad de sensores no garantiza que la incertidumbre en la localización llegue a ser aceptable para el estudio del problema, por esta razón es necesario para problemas donde la topografía del suelo no sea plana utilizar modelos más detallados del comportamiento de los campos eléctricos que tengan en cuenta las deformaciones debidas a la geometría del relieve.

5.1 Trabajo futuro

Debido a que uno de los propósitos del estudio de las tormentas eléctricas es el de analizar su comportamiento en el tiempo y en el espacio, se propone como trabajo futuro trabajar el tema del modelamiento dinámico del comportamiento de la ubicación tormentas eléctricas respecto al tiempo bajo condiciones donde el área de estudio cuente con un área montañosa como la que fue propuesta para el desarrollo de éste trabajo.

Adicional a lo anterior, también queda como propuesta en trabajar en técnicas que permitan mejorar la complejidad matemática de los modelos con relieve, de tal manera que se disminuya el tiempo computacional conservando una baja incertidumbre.

A. Anexo: Conexión Matlab® Comsol®

```
%%% Comunicación Matlab Comsol
```

```
%%% Primero se debe ejecutar el servidor de aplicación en: Inicio->Todos  
%%% los programas ->Comsol Multiphysics->Client Server->Comsol  
Multiphysics Server.
```

```
%% En su defecto use el siguiente sentencia.
```

```
open('C:\Program Files\COMSOL\COMSOL43b\bin\win64\comsolserver.exe')
```

```
%% Se inicializa la conexión con el servidor.
```

```
addpath('C:\Program Files\COMSOL\COMSOL43b\mli')
```

```
mphstart(2036)
```

```
%% Se importan las clases de comsol
```

```
import com.comsol.model.*
```

```
import com.comsol.model.util.*
```

```
ModelUtil.showProgress(true);
```

```
%% Importación de modelo de comsol.
```

```
addpath('C:\Users\Alvaro Villa\Dropbox\ComsolTesis')
```

```
model=mphload('PCarga2.mph')
```

```
%% Se corre el estudio de la simulacion
```

```
%model.study('std1').run;
```

```
%% Propiedades de la carga puntual
```

```
%Localización Geométrica
```

```
model.geom('geom1').feature('pt1').setIndex('p', '15500', 0); %% Eje X
```

```
model.geom('geom1').feature('pt1').setIndex('p', '16000', 1); %% Eje Y
```

```
model.geom('geom1').feature('pt1').setIndex('p', '6600', 2); %% Eje Z
```

```
model.geom('geom1').runAll
```

```
%Carga Eléctrica
```

```
model.physics('es').feature('pcg1').set('Qp', 1, '5');
```

```
model.study('std1').run;
```

```
%% Grafico Superficial 3D
```

```
pe = model.result.create('pe', 'PlotGroup3D');
```

```
pe.feature.create('surfl', 'Surface');
```

```
mphplot(model, 'pe', 'rangenum', 1)
```

```
%% Generacion y cambio de Plano cortante XY Presentación de resultados
```

```
% model.result.create('pg5', 'PlotGroup2D'); %Se genera una presentacion
bidimensional del campo
% model.result('pg5').run;
% model.result('pg5').feature.create('surf2', 'Surface');

% Creación del plano cortante
model.result.dataset.create('cpl2', 'CutPlane');
model.result.dataset('cpl2').set('quickplane', 'xy'); % plano paralelo
model.result.dataset('cpl2').set('quickz', '2'); % Distancia del plano
al plano xy
model.result.dataset('cpl2').run;

% Se genera el gráfico superficial
model.result('pg2').feature('surf1').set('expr', 'es.Ez');
model.result('pg2').run;
model.result('pg2').feature('surf1').set('data', 'cpl2');
model.result.dataset('cpl2').run;
model.result('pg2').run;
figure
mphplot(model, 'pg2', 'rangenum', 1)

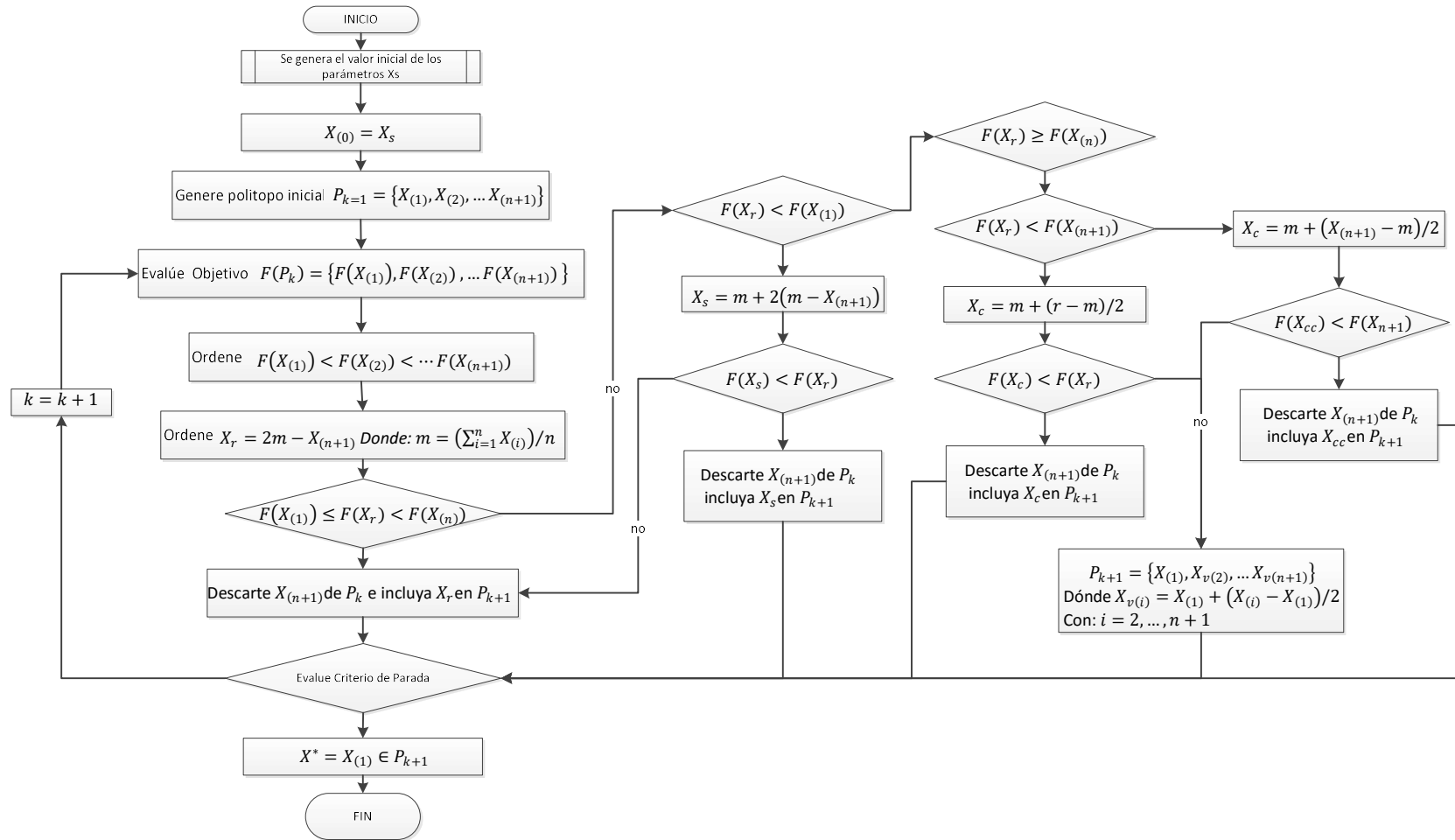
%% Cambio del mallado del modelo
% model.mesh('mesh1').feature('size').set('hmax', '1000');
% model.mesh('mesh1').run; %se ejecuta la construcción de la malla
% figure
% mphmesh(model)%%% Grafico del mallado.

%% cerrar conexión con el servidor de Comsol
ModelUtil.disconnect;
```

B. Anexo: Ubicación de los puntos de observación de las pruebas de campo

	Localización Geográfica						Altitud	Localización Referencia		Lugar de Referencia
	Latitud (N)			Longitud (O)				Y	X	
	°	'	''	°	'	''				
S1	6	16	31.86	75	35	30.72	1560	16658	14455	Bloque M7 Facultad Minas
S2	6	15	37.1	75	34	2.83	1480	14972	17145	SIU U de A
S3	6	13	8.2	75	35	12.92	1500	10389	15000	Aeropuerto Olaya Herrera
S4	6	11	20.14	75	33	30.41	1830	7062	18137	ISA interconexión eléctrica
S5	6	14	9.81	75	34	47.25	1560	12285	15785	Pueblito Paisa
S6	6	15	58.65	75	34	57.15	1620	15635	15482	Cerro El Volador
S7	6	17	24.86	75	33	53.21	1470	18289	17439	Estación Tricentenario
S8	6	18	7.16	75	34	6.32	1600	19591	17038	SENA pedregal
S9	6	13	50.93	75	36	33.26	1580	11704	12541	Metroplus U de M
S10	6	12	38.27	75	34	37.37	1500	9467	16088	Politécnico JIC
S11	6	10	20.65	75	36	34.12	1580	5231	12515	Parque de Itagüí
S12	6	11	9.73	75	35	9.99	1530	6742	15090	Estación Ayurá
S13	6	13	23.42	75	33	22.15	1860	10857	18390	Seminario Mayor
S14	6	15	23.84	75	36	48.33	1540	14564	12080	Estación San Javier
S15	6	17	40.12	75	32	38.63	1840	18759	19722	Biblioteca España
S16	6	10	11.95	75	35	13.88	1590	4963	14970	Parque Envigado
S17	6	14	41.23	75	34	24.05	1500	13252	16496	Alcaldía de Medellín
S18	6	14	40.73	75	33	2.36	1600	13237	18996	ITM Fraternidad
S19	6	17	6.46	75	33	23.87	1580	17723	18337	Metroplus Aranjuez
S20	6	16	44.57	75	38	7.13	1940	17049	9668	Hospital San Cristóbal

C. Anexo: Método de Nelder Mead.



Bibliografía

- [1] M. Sadiku, Elements of Electromagnetics. Oxford University Press, Incorporated, 2014.
- [2] L. M. Magid, "ELECTROMAGNETIC FIELDS, ENERGY, AND WAVES.," 1972.
- [3] A. S. Soto, Electromagnetismo. Universidad de Antioquia, 2009.
- [4] V. Cooray, The lightning flash. The Institution of Engineering and Technology, 2003.
- [5] V. A. Rakov and M. A. Uman, Lightning: physics and effects. Cambridge University Press, 2003.
- [6] H. Torres-Sánchez, El Rayo. Mitos, leyendas, ciencia y tecnología. Univ. Nacional de Colombia, 2002.
- [7] D. Aranguren, "Desempeño de Sensores de Campo Electrostatico en Sistemas de Alerta de Tormentas," Doctoral Thesis, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2011.
- [8] D. R. MacGorman and W. D. Rust, The electrical nature of storms. Oxford University Press, USA, 1998.
- [9] D. Aranguren, "Estudio de las Tormentas Eléctricas a Través del Campo Eléctrico Ambiental," Master Study, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2006.
- [10] K. Riemann-Campe, K. Fraedrich, and F. Lunkeit, "Global climatology of Convective Available Potential Energy (CAPE) and Convective Inhibition (CIN) in ERA-40 reanalysis," Atmospheric Res., vol. 93, no. 1-3, pp. 534-545, Jul. 2009.
- [11] S. Barkidija and Ž. Fuchs, "Precipitation correlation between convective available potential energy, convective inhibition and saturation fraction in middle latitudes," Atmospheric Res., vol. 124, pp. 170-180, Apr. 2013.
- [12] C. L. Archer and M. Z. Jacobson, "Geographical and seasonal variability of the global 'practical' wind resources," Appl. Geogr., vol. 45, pp. 119-130, Dec. 2013.
- [13] V. A. Rakov, "The Physics of Lightning," Surv. Geophys., vol. 34, no. 6, pp. 701-729, Nov. 2013.
- [14] C. T. R. Wilson, "On some determinations of the sign and magnitude of electric discharges in lightning flashes," Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, vol. 92, no. 644, pp. 555-574, 1916.
- [15] C. T. R. Wilson, "Investigations on Lightning Discharges and on the Electric Field of Thunderstorms," Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. Contain. Pap. Math. Phys. Character, vol. 221, pp. 73-115, Jan. 1921.
- [16] R. Solomon, C. Adamo, and M. Baker, "A lightning initiation mechanism: application to a thunderstorm electrification

- model," *Comptes Rendus Phys.*, vol. 3, no. 10, pp. 1325-1333, Dec. 2002.
- [17] H. R. Pruppacher and J. D. Klett, *Microphysics of Clouds and Precipitation*, Second revised and expanded edition with an introduction to cloud chemistry and cloud electricity., vol. 18. USA: Springer, 2010.
- [18] P. Jungwirth, D. Rosenfeld, and V. Buch, "A possible new molecular mechanism of thundercloud electrification," *Atmospheric Res.*, vol. 76, no. 1-4, pp. 190-205, Jul. 2005.
- [19] C. T. . Wilson, "The Electric Field of a Thundercloud and Some of Its Effects," 1924.
- [20] E. R. Williams, "Sprites, elves, and glow discharge tubes," *Phys. Today*, vol. 54, no. 11, pp. 41-47, Nov. 2001.
- [21] M. Vargas and H. Torres, "On the development of a lightning leader model for tortuous or branched channels - Part I: Model description," *J. Electrostat.*, vol. 66, pp. 482-488, 2008.
- [22] M. A. Uman, *The Lightning Discharge*. Courier Dover Publications, 2001.
- [23] H. Tsuchiya, T. Enoto, K. Iwata, S. Yamada, T. Yuasa, T. Kitaguchi, M. Kawaharada, K. Nakazawa, M. Kokubun, H. Kato, M. Okano, T. Tamagawa, and K. Makishima, "Hardening and Termination of Long-Duration γ Rays Detected Prior to Lightning," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, no. 1, p. 015001, Jul. 2013.
- [24] J. Lopez, E. Perez, J. Herrera, D. Aranguren, and L. Porras, "Thunderstorm warning alarms methodology using electric field mills and lightning location networks in mountainous regions," in *2012 International Conference on Lightning Protection (ICLP)*, 2012, pp. 1 -6.
- [25] J. López, "Metodología Para Predicción De Tormentas Eléctricas A Partir De Mediciones De Campo Electroestático Ambiental Y Sistemas De Localización De Rayos En Zona Montañosa," Master Study, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2011.
- [26] K. L. Cummins and M. J. Murphy, "An Overview of Lightning Locating Systems: History, Techniques, and Data Uses, With an In-Depth Look at the U.S. NLDN," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 51, no. 3, pp. 499-518, Aug. 2009.
- [27] J. R. Dwyer, H. K. Rassoul, M. Al-Dayeh, L. Caraway, A. Chrest, B. Wright, E. Kozak, J. Jerauld, M. A. Uman, V. A. Rakov, D. M. Jordan, and K. J. Rambo, "X-ray bursts associated with leader steps in cloud-to-ground lightning," *Geophys. Res. Lett.*, vol. 32, no. 1, p. L01803, Jan. 2005.
- [28] H. Christian, R. Blakeslee, S. Goodman, D. Mach, M. Stewart, D. Buechler, W. Koshak, J. Hall, W. Boeck, K. Driscoll, and others, "The lightning imaging sensor," in *NASA conference publication*, 1999, pp. 746-749.
- [29] H. J. Christian, R. J. Blakeslee, D. J. Boccippio, W. L. Boeck, D. E. Buechler, K. T. Driscoll, S. J. Goodman, J. M. Hall, W. J. Koshak, D. M. Mach, and M. F. Stewart, "Global frequency and distribution of lightning as observed from space

- by the Optical Transient Detector," J. Geophys. Res. Atmospheres, vol. 108, no. D1, p. 4005, Jan. 2003.
- [30] A. Fort, M. Mugnaini, V. Vignoli, S. Rocchi, F. Perini, J. Monari, M. Schiaffino, and F. Flocchi, "Design, Modeling, and Test of a System for Atmospheric Electric Field Measurement," IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 60, no. 8, pp. 2778-2785, Aug. 2011.
- [31] E. A. Jacobson and E. P. Krider, "Electrostatic Field Changes Produced by Florida Lightning," J. Atmospheric Sci., vol. 33, no. 1, pp. 103-117, Jan. 1976.
- [32] S. E. Reynolds and H. W. Neill, "THE DISTRIBUTION AND DISCHARGE OF THUNDERSTORM CHARGE-CENTERS," J. Meteorol., vol. 12, no. 1, pp. 1-12, Feb. 1955.
- [33] J. Montanyà, S. Soula, M. Murphy, V. March, D. Aranguren, G. Solà, and D. Romero, "Estimation of charge neutralized by negative cloud-to-ground flashes in Catalonia thunderstorms," J. Electrostat., vol. 67, no. 2-3, pp. 513-517, May 2009.
- [34] M. A. Cooper and M. Z. A. Ab Kadir, "Lightning injury continues to be a public health threat internationally," Population, vol. 5, p. 00, 2010.
- [35] M. A. Cooper, R. L. Holle, and C. Andrews, "Distributions of lightning injury mechanisms," in Preprints, International Lightning Detection Conference, April, 2008, pp. 21-23.
- [36] "Accidentes y muertes causados por rayos en Colombia desde 2010 hasta abril de 2013." [Online]. Available: <http://keraunos.co/index.php/rayos-colombia/mapa-de-accidentes-por-rayos>. [Accessed: 30-Oct-2014].
- [37] D. de J. Pérez Pérez, "Eficiencia de los sistemas de localización de rayos en zonas montañosas," masters, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, 2014.
- [38] ÁREA METROPOLITANA DEL VALLE DE ABURRÁ, ATLAS METROPOLITANO, Primera Edición. Medellín, 2010.
- [39] "Medellín, imán de rayos," El Colombiano.com. [Online]. Available: http://www.elcolombiano.com/BancoConocimiento/M/medellin_iman_de_rayos/medellin_iman_de_rayos.asp. [Accessed: 08-Oct-2014].
- [40] "Charla con el ingeniero que lleva 40 años 'cazando' rayos," Bogotá, Colombia, 30-Mar-2013.
- [41] "NASA - ASTER Global Digital Elevation Map." [Online]. Available: <http://asterweb.jpl.nasa.gov/gdem.asp>. [Accessed: 06-Nov-2014].
- [42] "NASA - Shuttle Radar Topography Mission SRTM." [Online]. Available: <http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/>. [Accessed: 06-Nov-2014].
- [43] M. J. Murphy, E. P. Krider, and M. W. Maier, "Lightning charge analyses in small Convection and Precipitation Electrification (CaPE) experiment storms," J. Geophys. Res. Atmospheres 1984-2012, vol. 101, no. D23, pp. 29615-29626, 1996.

- [44] L. M. Maier and E. P. Krider, "The charges that are deposited by cloud-to-ground lightning in Florida," *J. Geophys. Res. Atmospheres*, vol. 91, no. D12, pp. 13275-13289, Nov. 1986.
- [45] L. Sánchez, "Tipos de Coordenadas Manejados en Colombia," Instituto Geográfico Agustín Codazzi, May 2004.
- [46] National Imagery and Mapping Agency NIMA, "World Geodetic System 1984: Is Definition and Relationship with Local and Geodetic Systems," United States Department of Defense, 2004.
- [47] T. Vicenty, "Direct and Inverse Solution Geodesics," *Surv. Rev.*, vol. XXIII, pp. 88-93, Apr. 1975.
- [48] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics with Matlab*, Third Edition. CRC Press, 2009.
- [49] A. K. Kamra and M. Ravichandran, "On the assumption of the Earth's surface as a perfect conductor in atmospheric electricity," *J. Geophys. Res. Atmospheres*, vol. 98, no. D12, pp. 22875-22885, Dec. 1993.
- [50] W. J. Koshak and E. P. Krider, "Analysis of lightning field changes during active Florida thunderstorms," *J. Geophys. Res.*, vol. 94, no. D1, pp. 1165-1186, 1989.
- [51] L. G. Cortés, "Modelamiento de la Influencia del Relieve en las Deformaciones del Campo Eléctrico Atmosférico en el Valle de Aburrá," Trabajo de Grado, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2011.
- [52] COMSOL, "COMSOL Multiphysics User's Guide," COMSOL, May 2012.
- [53] COMSOL, "LiveLink(TM) for MATLAB (R) User's Guide," COMSOL, May 2012.
- [54] B. F. J. Schonland, "The interchange of electricity between thunderclouds and the earth," *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, vol. 118, no. 779, pp. 252-262, 1928.
- [55] Alcaldía de Medellín, "Medellín en Cifras No. 2 (Primera Edición)," Alcaldía de Medellín, Medellín, 2, Dec. 2011.
- [56] T. W. Wormell, "The effects of thunderstorms and lightning discharges on the earth's electric field," *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Sci.*, vol. 238, no. 791, pp. 249-303, 1939.
- [57] E. J. Workman and R. E. Holzer, "A preliminary investigation of the electrical structure of thunderstorms," DTIC Document, 1942.
- [58] V. Barnard, "The approximate mean height of the thundercloud charges taking part in a flash to ground," *J. Geophys. Res.*, vol. 56, no. 1, pp. 33-35, 1951.
- [59] D. J. Malan and B. F. J. Schonland, "The electrical processes in the intervals between the strokes of a lightning discharge," *Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Sci.*, vol. 206, no. 1085, pp. 145-163, 1951.
- [60] M. Brook, N. Kitagawa, and E. J. Workman, "Quantitative study of strokes and continuing currents in lightning discharges to ground," *J. Geophys. Res.*, vol. 67, no. 2, pp. 649-659, Feb. 1962.

- [61] P. R. Krehbiel, M. Brook, and R. A. McCrory, "An analysis of the charge structure of lightning discharges to ground," *J. Geophys. Res. Oceans*, vol. 84, no. C5, pp. 2432-2456, May 1979.
- [62] E. P. Krider, "Electric field changes and cloud electrical structure," *J. Geophys. Res. Atmospheres*, vol. 94, no. D11, pp. 13145-13149, Sep. 1989.
- [63] P. R. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, vol. 336. McGraw-Hill New York, 1969.
- [64] W. J. Koshak and E. P. Krider, "A Linear Method for Analyzing Lightning Field Changes," *J. Atmospheric Sci.*, vol. 51, no. 4, pp. 473-488, Feb. 1994.
- [65] T. van den Boom and B. De Schutter, "Optimization in Systems and Control," *Lect. Notes Course SC4090 Delft Univ. Technol.*, 2004.
- [66] I. C. F. Ipsen, *Numerical Matrix Analysis: Linear Systems and Least Squares*, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM. Philadelphia USA, 2009.
- [67] J. A. Nelder and R. Mead, "A simplex method for function minimization," *Comput. J.*, vol. 7, no. 4, pp. 308-313, 1965.
- [68] J. . Lagarias, R. J. A., W. M.H., and P.E. Wright, "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions.," *SIAM J. Optim.*, vol. 9, no. 1, pp. 112-147, 1988.